Devoir surveillé n° 3

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

1. Étudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$)

1. Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que que pour tous réels x et t :

$$f(x) + (t - x) f'(x) \leq f(t)$$

2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_{n+1}$$

   Puis que pour tout entier naturel n. :

$$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser
3. On admet que pour tout x de l'intervalle$[-2, -1]$:

$$0 \leq (x - \alpha) f'(x) - f(x) \leq \frac{(x - \alpha)^2}{e}$$

   (a) Prouver alors que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$

   (b) Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n - 1}}$$

4. Écrire un programme en Scilab permettant, lorsque l'entier naturel p est donné par l'utilisateur, de calculer une valeur approchée de α, de telle sorte que l'on ait :

$$0 \leq u_n - \alpha \leq 10^{-p}$$

Exercice 2

On réalise une suite de lancers d'une piéce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité 1/2.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient pile (resp. face) au $k^{éme}$ lancer".
Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la premiére fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
2. (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
   (b) Sur le modéle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.
   (c) Déterminer $\mathrm{P}(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2) c : par une autre méthode.
   (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales que :
$$\forall k \geqslant 3 \qquad P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$$
   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.
   Montrer que la suite $(u_k)_{k \geqslant 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.
4. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$et $v_n$solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiants $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n(u_n - 1) = 1$.
3. Etude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$
   (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geq 3$, $n\ln(n) < v_n$.
   (c) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Etudier g et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$
   (e) Montrer enfin que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(v_n)}{n\ln(n)} = 1$.

Exercice 4

Trois joueurs A, B et C s'affrontent simultanément dans un jeu en plusieurs manches.

Pour chaque manche il n'y a qu'un vainqueur possible.

A et B sont de même force et gagnent les manches chacun avec une probabilité de $\dfrac{1}{5}$

Est déclaré vainqueur de ce jeu le premier joueur qui gagne deux manches **consécutives.**

1. Quelle est la probabilité de gain de C pour chaque manche ?
2. *On **pourra**, dans cette question, s'aider d'un arbre pondéré représentant les trois premières manches du jeu.*
   (a) Quelle sont les probabilité pour A, pour B, et pour C de gagner le match à l'issue de la deuxième manche ?
   (b) Quelle est la probabilité que le jeux comporte au moins trois manches ?
   (c) Montrer que la probabilité que A gagne le match à l'issue de la troisième manche est égale à $\dfrac{4}{125}$.
   (d) Quelle est la probabilité que C gagne la première partie sachant que A gagne le match à l'issue de la troisième manche ?
3. Pour tout n entier, $n \geq 1$, on note A_n (respectivement B_n ou C_n) l'événement : « le jeu n'est pas achevé avant la $n^{\text{ième}}$ manche et et la $n^{\text{ième}}$ manche est gagné par A (respectivement B pour B_n, ou C pour C_n) **et le jeu continue** ».
   On note également D_n : « le jeu est achevé avant la $n^{\text{ième}}$ manche ou lors de la $n^{\text{ième}}$ manche ».
   Conseil : prenez le temps de bien comprendre ces événements
   (a) Calculer $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$, $P(A_2)$, $P(B_2)$ et $P(C_2)$.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire des événements $A_{n+1} \cap A_n$ et $A_{n+1} \cap D_n$?
   (c) En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que $P(A_{n+1}) = \dfrac{1}{5}\left(P(B_n) + P(C_n)\right)$
   (d) En reprenant rapidement le raisonnement précédent pour les événements B_{n+1} et C_{n+1}, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\begin{cases} P(A_{n+1}) = & \dfrac{1}{5}\left(P(B_n) + P(C_n)\right) \\ P(B_{n+1}) = & \dfrac{1}{5}\left(P(A_n) + P(C_n)\right), \\ P(C_{n+1}) = & \dfrac{3}{5}\left(P(A_n) + P(B_n)\right) \end{cases}$
4. (a) A partir du résultat précédent, démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $P(A_n) = P(B_n)$.
   (b) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$.
   (c) Démontrer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que $P(A_{n+2}) = \dfrac{1}{5}P(A_{n+1}) + \dfrac{6}{25}P(A_n)$.
5. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P\left(A_n\right)$ en fonction de n.
   (b) A l'aide de la question 3.d, montrer, pour $n \geqslant 2$, que $P\left(C_n\right)$ peut s'écrire sous la forme $P\left(C_n\right) = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n - \dfrac{3}{10}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   Vérifier que cette formule convient également pour $n = 1$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(D_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} P(D_n)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?