Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 3

La calculatrice est interdite. Durée : 2h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^k pour tout entier $k \geqslant 2$. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 2$.
2. En développant $(A-2I)^3$, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée d'odre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^4 = 0_n$.
Calculer $(I-A)(I+A+A^2+A^3)$. En déduire que $I-A$ est inversible puis calculer son inverse.

Exercice 3. Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n$.
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Montrer que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à déterminer.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire une expression de A^n.
4. Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$
5. Déduire une expression de X_n en fonction de A^n et X_0. Puis déduire le terme général de u.

Exercice 4.
1. Résoudre :
   (a) $e^{2x} + 2e^x - 3 < 0$
   (b) $(\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3 < 0$.
   (c) $x + 2\sqrt{x} - 3 < 0$.
2. Montrer que :
   (a) $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ln(x+1) \leqslant x$.
   (b) $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1)$.

Exercice 5. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 16 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^{-1} et déterminer la matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $MD = DM$.
3. En déduire l'ensemble des matrices N telles que $NA = AN$ (Indication : Poser $M = P^{-1}NP$ et utiliser 2))
4. Déterminer toutes les matrices $Q \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = D$ (Indication : vérifier que $QD = DQ$ et utiliser 2))
5. En déduire l'ensemble des matrices R de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$ (Indication : poser $Q = P^{-1}RP$)