Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 3

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Chaque « grosse » question peut être traitée indépendamment des autres.

Question 1

Justifier la convergence et donner la valeur de la somme des séries :

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{2^n+n}{n!}$. (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{2n-1}}$. (c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{3^n+n^2}{5^{n-1}}$.

Question 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k)=a3^{-k}$.

1. Déterminer le seul réel a possible.
2. Calculer si possible l'espérance et la variance de X.
3. Calculer si possible l'espérance de $Y=2^X$ et $Z=4^X$.
4. Déterminer la fonction de répartition de X.

Question 3 On lance indéfiniment une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui donne le rang n du premier Pile obtenu.

Dans un deuxième temps, on lance un dé équilibré. Si $n\geqslant 4$, on gagne lorsque le dé ne tombe pas sur 1. Si $n\leqslant 3$, on gagne lorsque le dé tombe sur 5 ou 6.

On note G : « le joueur gagne la partie ».

1. Montrer que $P(G)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=n)P_{(X=n)}(G)$.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $P(X=n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
3. Déterminer $P(G)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0,u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant 2$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
3. (a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x)\leqslant x$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2,\mathrm{e}^2\right]$.
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell-u_n)$.
   (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}$, on a $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

(c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

(d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

(e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.

On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

pour tout $(i,\ j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i$ et $Y = j)$ est l'événement : « les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)$-ème est blanche ou les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)$-ème est verte ».

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$, on a $X = 3$ et $Y = 2$.

1. (a) Montrer que $P(X = i) = (1 - p)^i p + p^i(1 - p)$
   (b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$
   (c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.
2. Montrer, pour tout $(i,\ j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i$ et $Y = j) = p^{i+1}(1 - p)^j + (1 - p)^{i+1}p^j$.
3. (a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.
4. (a) Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
   (b) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 4

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n + 1$ ».

On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

- ⋆ Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = p\,(A_n)$
- ⋆ avec la convention $a_0 = 0$

1. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par :

$$f\,(x) = x^2 - q\,x - p\,q$$

1. Montrer que l'équation $f\,(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 $(r_1 < r_2)$. Exprimer $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$ en fonction de p et q.
2. Calculer $f\,(1)\,, f\,(-1)\,, f\,(0)$.
3. En déduire l'encadrement suivant :
$$|r_1| < |r_2| < 1$$

2. Equivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :
   - ⋆ on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réalisé ou
   - ⋆ on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

   montrer que l'on a, pour tout entier naturel n,
   $$a_{n+2} - q\,a_{n+1} - p\,q\,a_n = 0$$
3. Ecrire un programme, en Scilab, permettant de calculer a_n, l'entier n, les réels p et q étant donnés par l'utilisateur.
4. Montrer que pour tout entier, naturel n,
   $$a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right]$$
5. Déterminer une suite géométrique (b_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ (on dit que les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes).

3. Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :
$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
ainsi que les matrices unicolonnes X_n par :
$$\text{Pour tout entier naturel } n : \quad X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :
   $$X_{n+1} = A\,X_n$$
2. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles. (I désigne la matrice carrée unité d'ordre 2).
3. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
4. Calculer la matrice $D = P^{-1} A\,P$. (Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de r_2 et r_1 seulement).
5. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n :
   $$X_n = P\,D^n P^{-1} X_0$$
6. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_2, r_1, p et n.

4. Etude du temps d'attente du premier double pile .

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile.

Ainsi, pour tout entier naturel n,
$$p\,[T = n+1] = a_n$$

1. Montrer que T est une variable aléatoire, c'est-à-dire que :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} p\,[T = n+1] = 1$$
2. Prouver que T admet une espérance $E(T)$ et que :
   $$E(T) = \frac{1+p}{p^2}$$