# $\boxed{\textsc{Correction du DS n}^{\text{o}}\,3}$

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 2 (EDHEC 2010)

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. On a $u_0 = 1+\frac{1}{2^0} = 2$ et $u_1 = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right) = 2\times\frac{3}{2} = 3$ et $u_2 = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right) = 3\times\frac{5}{4}$
2. (a) On a $u_{n+1} = u_n \times \left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}u_n \geqslant u_n$ car $u_n \geqslant 0$ donc la suite est croissante et comme $u_0 = 2$
   *Conclusion :* $\boxed{u_n \geqslant 2}$ :

   (b) $u_{n+1} = u_n \times \left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ et on a vu *Conclusion :* $\boxed{\text{la suite est croissante}}$
3. (a) Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$.
   $g$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$

   | $x$ | $-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|
   | $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
   | $g(x)$ | | $\nearrow -$ | $0$ | $\searrow -$ | |

   Donc $g(x) \leqslant 0$ et *Conclusion :* $\boxed{\forall x > -1, \text{ on a : } \ln(1+x) \leqslant x.}$
   On pouvait aussi utiliser la concavité de $x \to \ln(1+x)$ dont la courbe est donc en dessous de sa tangente en 0 d'équation $y = x$

   (b) Comme produit de termes strictement positifs, $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

   Et comme $1+\frac{1}{2^k} > 1$ alors $\ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ et

   $$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 2$$

   *Conclusion :* $\boxed{\ln(u_n).\leqslant 2 \text{ pour tout entier } n}$
4. On a donc $u_n \leqslant e^2$.
   et comme la suite est croissante et majorée par $e^2$ (et minorée par 2), elle converge vers une limite $\ell \in \left[2, e^2\right]$
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

   (a) Comme $\ell > 0$ alors ln est continue en $\ell$ donc $\ln(u_n) \to \ln(\ell)$
   Or $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ donc$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \to \ln(\ell)$ quand $n \to +\infty$

   ce qui signifie que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ converge et que

   *Conclusion :* $\boxed{\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}$

(b) Comme $u_n$ et $\ell$ sont strictement positifs,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell)-\ln(u_n)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)-\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\end{aligned}$$

(c) Et comme $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}$ alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

*Conclusion :* $\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\ 0\leqslant\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}.}$

(d) On a vu que la suite $u$ était croissante donc $\ell-u\geqslant 0$ et de l'autre coté :

$$\ell-u_n-\ell\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)=-u_n+\ell\mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$$

et de $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}$ on tire $\frac{\ell}{u_n}\leqslant e^{1/2^n}$ soit $\ell-u_ne^{1/2^n}\leqslant 0$ donc $\left(-u_n+\ell\mathrm{e}^{-1/2^n}\right)e^{1/2^n}\leqslant 0$

Finalement $\ell-u_n-\ell\left(1-\mathrm{e}^{-1/2^n}\right)\leqslant 0$ et

*Conclusion :* $\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\ 0\leqslant\ell-u_n\leqslant\ell\left(1-\mathrm{e}^{-1/2^n}\right).}$

(e) $g(x)=1-\mathrm{e}^{-x}-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=e^{-x}-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-x}-1$ | | $\searrow +$ | $0$ | $\searrow -$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow -$ | $0$ | $\searrow -$ | |

Donc $g(x)\leqslant x$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, on a $1-e^{-x}\leqslant x$.

$1-\mathrm{e}^{-1/2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}$ et finalement

*Conclusion :* $\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\ 0\leqslant\ell-u_n\leqslant\frac{\ell}{2^n}.}$

Comme la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente, alors par majoration de termes positifs,

*Conclusion :* $\boxed{\text{la série de terme général } (\ell-u_n) \text{ est également convergente.}}$

**Exercice 3 (EML 1998)**

On note $N_V$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et $N_B$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

$N_V$ est le rang du premier $V$ dans une suite de tirages indépendants avec $\mathrm{P}(V)=p$ (équiprobabilité des boules) à chaque tirage.

*Conclusion :* $\boxed{\text{Donc } N_V\hookrightarrow\mathcal{G}(p) \text{ et de même } N_B\hookrightarrow\mathcal{G}(1-p)}$

1. (a) $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $(X=k)$ signifie que l'on a $k$ verte puis une blanche ou inversement.
   Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k) &= \mathrm{P}\left((N_V=k+1)\cup(N_B=k+1)\right)\\ &= \mathrm{P}(N_V=k+1)+\mathrm{P}(N_B=k+1)\\ &= (1-p)^k p+p^k(1-p)\end{aligned}$$

(b) $X$ a une espérance si la série suivante est absoulment convergente, ce qui équivaut à la convergence simple car les termes sont tous positifs.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} k\mathrm{P}\left(X=k\right) &= \sum_{k=1}^{M} k\left[\left(1-p\right)^k p + p^k\left(1-p\right)\right] \\
&= p\sum_{k=1}^{M} k\left(1-p\right)^k + \left(1-p\right)\sum_{k=1}^{M} kp^k \\
&= p\sum_{k=0}^{M} k\left(1-p\right)^k + \left(1-p\right)\sum_{k=0}^{M} kp^k \\
&\to p\frac{1-p}{\left(1-1+p\right)^2} = \left(1-p\right)\frac{p}{\left(1-p\right)^2}
\end{aligned}$$

car $|p|<1$ et $|1-p|<1$.

*Conclusion :* $\boxed{X \text{ admet une espérance et que } E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}.}$

(c) On étudie les variations de $E\left(X\right)$ fonction de $p$ :
$f\left(p\right) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.
$f$ est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\begin{aligned}
f'\left(p\right) &= \frac{1-p+p}{\left(1-p\right)^2} + \frac{-p-1+p}{p^2} \\
&= \frac{1}{\left(1-p\right)^2} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{2p-1}{p^2\left(1-p\right)^2}
\end{aligned}$$

Donc

| $p$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2p-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | affine |
| $f'\left(p\right)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f\left(p\right)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

*Conclusion :* $\boxed{E(X) \text{ est minimale lorsque } p = \frac{1}{2}, \text{ et vaut alors } 2}$

C'est quand on a les mêmes proportion de vertes et de blanches que l'on a en moyenne, les listes monocolore le splus courtes.

2. Pour tout $(i,\, j)$ de $(\mathbb{N}_n^*)^2$ :

$$\begin{aligned}
(X=i \text{ et } Y=j) &= \left(B_1\cap\cdots\cap B_i\cap V_{i+1}\cap\cdots\cap V_{i+j}\cap B_{i+j+1}\right) \\
&\cup\left(V_1\cap\cdots\cap V_i\cap B_{i+1}\cap\cdots\cap B_{i+j}\cap V_{i+j+1}\right)
\end{aligned}$$

les deux () étant incompatibles, et les tirages indépendants, on a

$$\mathrm{P}\left(X=i \text{ et } Y=j\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

3. (a) La loi de $Y$ est la seconde loi marginale :
$Y\left(\Omega\right) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(Y=j\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X=i \text{ et } Y=j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}\left[p^{i+1}\left(1-p\right)^j + \left(1-p\right)^{i+1}p^j\right] \\
\sum_{i=1}^{M} \text{''} &= (1-p)^j\, p\sum_{i=1}^{M} p^i + p^j\left(1-p\right)\sum_{i=1}^{M}(1-p)^i \\
&\to (1-p)^j\, p\left(\frac{1}{1-p}-1\right) + p^j\left(1-p\right)\left(\frac{1}{p}-1\right) \text{ donc} \\
\mathrm{P}\left(Y=j\right) &= \left(1-p\right)^{j-1}p^2 + p^{j-1}\left(1-p\right)^2
\end{aligned}$$

(b) La convergence absolue de la série $\sum_{j\geq 1} j\mathrm{P}(Y=j)$ équivaut à sa convergence simple.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M} j\mathrm{P}(Y=j) &= \sum_{j=1}^{M} j(1-p)^{j-1}p^2 + \sum_{j=1}^{M} jp^{j-1}(1-p)^2\\ &= \frac{p^2}{1-p}\sum_{j=1}^{M} j(1-p)^j + \frac{(1-p)^2}{p}\sum_{j=1}^{M} jp^j\\ &\to \frac{p^2}{1-p}\frac{1-p}{p^2} + \frac{(1-p)^2}{p}\frac{p}{(1-p)^2} = 2\end{aligned}$$

*Conclusion :* $\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E(Y)=2}$

4. (a) Si $p \neq \frac{1}{2}$,
et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=1\cap Y=1) &= p^2(1-p)+(1-p)^2p\\ &= (1-p)\left(p^2+(1-p)p\right)\\ &= p(1-p)\\ \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1) &= [(1-p)p+p(1-p)]\left[p^2+(1-p)^2\right]\\ &= 2(1-p)p\left[2p^2-2p+1\right]\\ (1)-(2) &= (1-p)p\left[1-2\left(2p^2-2p+1\right)\right]\\ &= (1-p)p\left[-4p^2+4p-1\right]\\ &= -(1-p)p[2p-1]^2\end{aligned}$$

et comme $p\neq 1/2$ $\mathrm{P}(X=1\cap Y=1)\neq \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1)$

*Conclusion :* $\boxed{\text{si } p\neq \frac{1}{2} \text{ alors } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

(b) Si $p=\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=i) &= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^i\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^i\frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^i\\ \mathrm{P}(Y=j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^j\\ \mathrm{P}(X=i \text{ et } Y=j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^j+\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^j\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \mathrm{P}(X=i)\mathrm{P}(Y=j)\end{aligned}$$

*Conclusion :* $\boxed{\text{si } p=\frac{1}{2} \text{ les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

### Exercice 4 (ECRICOM 2005)

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité $p$ $(0<p<1)$ et face avec la probabilité $q=1-p$.

On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $A_n$ l'événement :"deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro $n$ et $n+1$".

On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements $A_n$ par :

- ⋆ Pour tout entier naturel $n$ non nul : $a_n = p(A_n)$
- ⋆ avec la convention $a_0 = 0$

### 1. Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale $f$ de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = x^2 - q\,x - p\,q$$

1. $f(x) = 0$ est une équation du second dégré qui a pour discriminant : $\Delta = q^2 + 4pq > 0$
   Donc elle a deux racines distinctes : $r_1 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$ (pour que $r_1 < r_2$ )
   - ⋆ $r_1 + r_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = q$
   - ⋆ $r_1 \times r_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{q^2-\sqrt{\Delta}^2}{4} = \frac{q^2-\Delta}{4} = \frac{q^2-q^2-4pq}{4} = -p\,q$
2. A voire la suite (valeurs intermédiaires) , on détermine les signes :
   - ⋆ $f(1) = 1 - q - p\,q = p - p\,q = p(1-q) = p^2 > 0$
   - ⋆ $f(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1-p) = 1 + q^2 > 0$
   - ⋆ $f(0) = -p\,q < 0$
3. Comme $f$ est continue et que $0 \in \left]f(0), f(-1)\right[$ alors il existe $x \in \left]-1, 0\right[$ tel que $f(x) = 0$ et de même il existe $x \in \left]0, 1\right[$ tel que $f(x) = 0$.
   Comme $f(x) = 0$ n'a pour racines que $r_1$ et $r_2$ alors $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$
   **Variante** : le tableau de variation de $f$ est :

   | $x$ | | $r_1$ | | | $r_2$ | |
   |---|---|---|---|---|---|---|
   | $f(x)$ | $+ \searrow$ | $0$ | $\searrow$ $-$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow +$ |

   comme $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ et $f(-1) > 0$ on a par exclusion : $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$
   Donc $|r_2| < 1$ et $|r_1| < 1$
   Enfin, comme $r_2 > 0$ et $r_1 < 0$ : $|r_2| = r_2$ et $|r_1| = -r_1$
   Et comme $q > 0$ : $-r_1 = \frac{\sqrt{\Delta}-q}{2} < \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = r_2$
   *Conclusion :* $\boxed{|r_1| < |r_2| < 1}$

### 2. Equivalent de $a_n$ quand $n$ tend vers l'infini.

1. On décompose les événements pour calculer leurs proabbiltiés en notant $P_1P_2$ pour $P_1 \cap P_2$
   - ⋆ On a $a_1 = p(A_1) = p(P_1P_2) = p(P_1)\,p(P_2)$ car les lancers sont indépendants. Donc $a_1 = p^2$
   - ⋆ $A_2 =$"premier PP au 2° lancer" on a alors $P_2 \cap P_3$ et on ne peut pas avoir $P_1$ (sinon on a $A_1$ et pas $A_2$)
     Donc $A_2 = F_1P_2P_3$ et $a_2 = p(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = q\,p^2$
   - ⋆ Si $A_3$ alors $P_3P_4$. Si on a $P_1$ il faut alors $F_2$ sinon on a $A_1$. Si on a $F_1$ alors il faut $F_2$ sinon on a $A_2$
     Donc $A_3 = (P_1F_2P_3P_4) \cup (F_1F_2P_3P_4)$ incompatibles et
     $a_3 = p(P_1F_2P_3P_4) + p(F_1F_2P_3P_4) = pqp^2 + q^2p^2 = qp^3(p+q) = qp^3$
2. Pour la réalisation de $A_{n+2}$ :
   - ⋆ ou bien on a $P_1$ auquel cas il ne faut pas avoir $P_2$ sinon on a $A_1$.
     Donc on a alors $F_2$ et il faut le premier $PP$ $n$ lancers pus tard (i.e. $A_n$ est réalisé)

   ou

   - ⋆ on a $F_1$ et le premier $PP$ doit intervenir $n+1$ lancers plus tard (i.e.$A_{n+1}$ est réalisé.)

   Donc $p(A_{n+2}) = p(P_1F_2)\,p(A_n) + p(F_1)\,p(A_{n+1})$
   car premier $PP$ $n$ lancers pus tard est indépendant de $P_1F_2$ et e premier $PP$ doit intervenir $n+1$ lancers plus tard est indépendant de $F_1$
   D'où $a_{n+2} = q\,a_{n+1} + p\,q\,a_n$ et $a_{n+2} - q\,a_{n+1} - p\,q\,a_n = 0$ qui est encore vraie pour $n = 0$ ($a_2 - qa_1 - p\,q\,0 = 0$)
3. Voir TP (suite récurrente linéaire d'ordre 2)
4. La suite $a$ est récurente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équation caractéritique est : $x^2 - q\,x + pq = 0$ qui a pour racines $r_1$ et $r_2$
   Donc pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \alpha\,r_1^n + \beta\,r_2^n$ avec $\alpha$ et $\beta$ déterminés par $a_0$ et $a_1$

- $\star$ pour $n=0$ : $\frac{p^2}{r_2-r_1}\left[r_2^0-r_1^0\right]=0=a_0$
- $\star$ et pour $n=1$ : $\frac{p^2}{r_2-r_1}\left[r_2^1-r_1^1\right]=p^2=a_1$
- $\star$ Donc les solutions sont $\alpha=-\frac{p^2}{r_2-r_1}$ et $\beta=\frac{p^2}{r_2-r_1}$

**Variante :** on résoud directement $\left\{\begin{array}{c} a_0=0=\alpha+\beta \\ a_1=p^2=\alpha\, r_1+\beta\, r_2\end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{c}\beta=-\alpha \\ p^2=\alpha\,(r_1-r_2)\end{array}\right.$
et $\alpha=\frac{-p^2}{r_2-r_1}$ et $\beta=\frac{p^2}{r_2-r_1}$

*Conclusion :* $\boxed{\text{pour tout } n\geq 1 : a_n=\frac{p^2}{r_2-r_1}\left[r_2^n-r_1^n\right] \text{ et également pour } n=0}$

5. On a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\left[r_2^n-r_1^n\right] \\ &= \frac{p^2r_2^n}{r_2-r_1}\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right]\end{aligned}$$

et comme $\left|\frac{r_1}{r_2}\right|<1$ alors $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\to 0$ d'où $\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right]\to 1$ et

*Conclusion :* $\boxed{(a_n) \text{ est équivalente à } (b_n) \text{ lorsque } n \text{ tend vers plus l'infini où } b_n=\dfrac{p^2r_2^n}{r_2-r_1}}$

### 3. Expression de $a_n$ en fonction de $n$ par une méthode matricielle.

On définit les matrices $A$ et $P$ par :

$$A=\begin{pmatrix} r_1+r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices unicolonnes $X_n$ par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : \quad X_n=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n\end{pmatrix}$$

1. On a pour tout entier $n$ :$X_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q\,a_{n+1}+p\,q\,a_n \\ a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q & p\,q \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n\end{pmatrix}$
   et comme $r_1+r_2=q$ et $-r_1r_2=p\,q$ on a bien alors
   $$X_{n+1}=A\,X_n$$
2. $A-r_1I=\begin{pmatrix} r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_1\end{pmatrix}$ et comme la seconde colonne est $-r_1$ la première, elles sont liées et la matrice est non inversible.
   $A-r_2I=\begin{pmatrix} r_1 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_2\end{pmatrix}$ et comme la seconde colonne est $-r_2$ la première, elles sont liées et la matrice est non inversible.
3. Donc $r_1$ et $r_2$ sont valeurs propres de $A$.
   Comme elles sont distinctes et que $A$ est de taille 2 alors $A$ est diagonalisable.
4. Au vu de la suite, on se doute que $P$ est la matrice de passage et on test donc ses colonnes comme colonnes propres :
   $\begin{pmatrix} r_1+r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_1^2 \\ r_1\end{pmatrix}=r_1\begin{pmatrix} r_1 \\ 1\end{pmatrix}$ donc elle est colonne propre associée à $r_1$
   $\begin{pmatrix} r_1+r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_2^2 \\ r_2\end{pmatrix}=r_2\begin{pmatrix} r_2 \\ 1\end{pmatrix}$ donc elle est colonne propre associée à $r_2$
   Donc la concaténation de ces 2 colonnes propres associées à des valeurs propres distinctes fomre une matrice inversible
   et $A=P\,D\,P^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2\end{pmatrix}$
   On calcule $P^{-1}$, par Gauss :

$$
\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \end{array} & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - r_1 L_1 \end{array} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_2 - r_1 & 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 - L_2/\left(r_2 - r_1\right) \\ L_2/\left(r_2 - r_1\right) \end{array} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{r_2}{r_2 - r_1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{-r_1}{r_2 - r_1} \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 - L_2/\left(r_2 - r_1\right) \\ L_2/\left(r_2 - r_1\right) \end{array}
\end{array}
$$

donc $P^{-1} = \dfrac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$

5. On a vu que $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$
6. Par récurrence :
   - ⋆ pour $n = 0$ : $P\, D^0 P^{-1} X_0 = I\, X_0 = X_0$
   - ⋆ Soit $n \geq 0$ tel que $X_n = P\, D^n P^{-1} X_0$
     alors $X_{n+1} = A\, X_n = P\, D P^{-1} P\, D^n P^{-1} X_0 = P\, D\, D^n P^{-1} X_0 = P\, D^{n+1} P^{-1} X_0$
   - ⋆ Donc pour tout entier $n$ : $X_n = P\, D^n P^{-1} X_0$
7. Comme $D$ est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$ et

$$
\begin{aligned}
X_n &= P D^n \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p^2 \\ p^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_1^n p^2 \\ r_2^n p^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} \left(r_1 r_2^n - r_2 r_1^n\right) p^2 \\ \left(r_2^n - r_1^n\right) p^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dont la seconde composante est $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} \left[r_2^n - r_1^n\right]$ (qui est bien le résultat trouvé précédemment)

## 4. Etude du temps d'attente du premier double pile .

On désigne par $T$ l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile.

Ainsi, pour tout entier naturel $n$,

$$
p\left[T = n + 1\right] = a_n
$$

1. On calcule la somme partielle :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} p\left[T = n + 1\right] &= \sum_{n=1}^{N} a_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[r_2^n - r_1^n\right] \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\sum_{n=1}^{N} r_2^n - \sum_{n=1}^{N} r_1^n\right] \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\sum_{n=0}^{N} r_2^n - 1 - \sum_{n=0}^{N} r_1^n + 1\right] \\
&\to \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{1 - r_2} - \frac{1}{1 - r_1}\right]
\end{aligned}
$$

converge car $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} p\,[T = n+1]$ converge et vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} p\,[T = n+1] &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{1}{1-r_2} - \frac{1}{1-r_1}\right] \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\frac{r_2 - r_1}{(1-r_2)(1-r_1)} \\
&= \frac{p^2}{1-(r_1+r_2)+r_1 r_2} \\
&= \frac{p^2}{1-q-p\,q} = \frac{p^2}{p-p\,q} \\
&= \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $T$ est une variable aléatoire.

2. $T$ a une espérance si $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,p\,[T = n+1]$ est absolument convergente. (ce qui équivaut à la convergence simple puisque les valeurs de $T$ sont toutes positives)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} (n+1)\,p\,[T = n+1] &= \sum_{n=1}^{N} (n+1)\,a_n \\
&= \sum_{n=1}^{N} n\,a_n + \sum_{n=1}^{N} a_n \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\sum_{n=1}^{N} n\,[r_2^n - r_1^n] + \sum_{n=1}^{N} a_n \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\sum_{n=0}^{N} n\,r_2^n - 0 - \sum_{n=0}^{N} n\,r_1^n + 0\right] + \sum_{n=1}^{N} a_n \\
&\to \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2}{(1-r_2)^2} - \frac{r_1}{(1-r_1)^2}\right] + 1
\end{aligned}$$

Donc $T$ a une espérance qui vaut

$$\begin{aligned}
E(T) &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2}{(1-r_2)^2} - \frac{r_1}{(1-r_1)^2}\right] + 1 \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{[(1-r_2)(1-r_1)]^2}\right] + 1
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
(1-r_2)(1-r_1) &= 1-(r_1+r_2)+r_1 r_2 = 1-q-pq \\
&= p - pq = p(1-q) = p^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2 &= r_2\left(1-2r_1+r_1^2\right) - r_1\left(1-2r_2+r_2^2\right) \\
&= r_2 - 2r_1 r_2 + r_2 r_1^2 - r_1 + 2r_1 r_2 - r_1 r_2^2 \\
&= r_2 + r_2 r_1^2 - r_1 - r_1 r_2^2 \\
&= r_2 - r_1 + r_1 r_2 (r_1 - r_2) \\
&= (r_2 - r_1)(1 - r_1 r_2) \\
&= (r_2 - r_1)(1 + pq)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(T) &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{[(1-r_2)(1-r_1)]^2}\right] + 1 \\
&= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\frac{(r_2 - r_1)(1 + p\,q)}{p^4} + 1 \\
&= \frac{1 + p\,q}{p^2} + 1 = \frac{1 + pq + p^2}{p^2} \\
&= \frac{1 + p(q + p)}{p^2} \\
&= \frac{1 + p}{p^2}
\end{aligned}$$