Devoir surveillé n° 3 (rattrapage)

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :

Exercice 1 (**Questions (chaque« grosse » question peut être traitée indépendamment des autres).**).

1. *Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :*

$$\begin{cases} t_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = \dfrac{t_n}{3-2t_n} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{t_n}$$

   (a) *Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}$, on ait $a + \dfrac{b}{3-2x} = \dfrac{x}{3-2x}$*

   (b) *En utilisant les deux questions précédentes, montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in]0;1[$*
   (On admettra si besoin avoir trouvé $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$ dans la question (a))
   En quoi ce résultat justifie-t-il que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies ?

   (c) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$*

   (d) *Déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celui $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (on admettra si besoin le résultat de la question précédente)

2. *Calculer les limites de suites suivantes :*

   (a) $u_n = 3^{-n}n!$ (b) $v_n = \dfrac{-2}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$ (c) $w_n = \dfrac{e^n + 3}{n^{100} - 2}$.

3. *On rappelle que l'instruction* `linspace(0,2,17)` *affiche la matrice ligne*
   `0. 0.125 0.25 0.375 0.5 0.625 0.75 0.875 1. 1.125 1.25 1.375 1.5 1.625 1.75 1.875 2.`

   (a) *Expliquer le fonctionnement de l'instruction* `linspace`

   (b) *Expliquer précisément ce que fait la procédure suivante*
```
x=linspace(0,10,101)
y=x.^2 - x
plot(x,y)
```

   (c) *Donner la valeur maximale et la valeur minimale parmi les coefficients de y.*

4. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

   (a) *La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.*

   (b) *Écrire une procédure Scilab permettant d'afficher la matrice A, la matrice A^4, puis enfin la matrice obtenue en élevant chacun des coefficients de la matrice A à la puissance 4.*

Exercice 2

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que $\forall k \in [\![1\,;n]\!], P(X=k) = P(Y=k) = P(Z=k) = \dfrac{1}{n}$.

1. (a) *Montrer que :* $P(X+Y=k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} P_{(Y=i)}(X+Y=k)P(Y=i)$. *En déduire que* $\forall k \in [\![2\,;n+1]\!], P(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

   (b) *Montrer que :* $\forall k \in [\![n+2\,;2n]\!], P(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. *Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :*
$$P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}.$$
3. (a) *On pose $T = n+1-Z$. Montrer que* $\forall k \in [\![1\,;n]\!], P(T=k) = \dfrac{1}{n}$.

   (b) *Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?*

   (c) *En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité* $P(X+Y+Z=n+1)$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. *Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.*
2. (a) *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :* $u_n \geqslant 2$.

   (b) *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).*

   (c) *Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a :* $\ln(1+x) \leqslant x$.

   (d) *En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.*
3. *En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de* $\left[2, \mathrm{e}^2\right]$.
4. *On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.*

   (a) *Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que l'on a :* $\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

   (b) *Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}$, on a* $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

   (c) *Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que* $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

   (d) *Déduire de la question précédente que* $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

   (e) *Justifier que, pour tout réel x, on a* $1-\mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. *En déduire que* $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 4

Problème

Partie 1 : étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m \in \mathbb{N},\ P(X \geq m) > 0$.

On suppose également que X vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, P_{(X\geq m)}(X \geq n+m) = P(X \geq n)$. *On pose* $P(X=0) = p$ *et on suppose que* $p > 0$.

1. *On pose* $q = 1 - p$. *Montrer que* $P(X \geq 1) = q$. *En déduire que* $0 < q < 1$.
2. *Montrer que :* $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geq n+m) = P(X \geq m)P(X \geq n)$.
3. *Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose* $u_n = P(X \geq n)$.
   (a) *Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.*
   (b) *Pour tout n de N, exprimer $P(X \geq n)$ en fonction de n et de q.*
   (c) *Établir que :* $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1)$.
   (d) *En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a* $P(X = n) = q^n p$.

Partie 2 : taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}P(Y \geqslant n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = P_{(Y\geqslant n)}(Y = n)$.

1. (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{P(Y=n)}{P(Y \geq n)}$.
   (b) *En déduire que :* $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \dfrac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)}$.
   (c) *Établir alors que :* $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \lambda_n < 1$.
   (d) *Montrer par récurrence, que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \lambda_k)$.
2. (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n)$.
   (b) *En déduire que* $\lim_{n\to\infty} P(Y \geq n) = 0$.
   (c) *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$
   (d) *Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.*
3. (a) *On considère la déclaration de fonction, en Scilab, rédigée de manière récursive :*

```
function y=f(n)
If n=0 then f=......
          else f=......
end
```

   Compléter cette déclaration pour qu'elle renvoie $n!$ lorsqu'on appelle $f(n)$.

Partie 3 : caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

1. *Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 1.*
2. *On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant :* $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$. *On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a :* $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.
   (a) *Montrer que* $0 < \lambda < 1$.
   (b) *Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geq n)$ en fonction de λ et n.*
   (c) *Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.*