Devoir surveillé n° 4

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Soit n un entier naturel. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Factoriser $X^2 - 3X + 2$..
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ en fonction de n.
3. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversibles et calculer son inverse.
4. En utilisant 1), montrer que $A - I$ et $A - 2I$ ne sont pas inversibles.
5. En utilisant 2)Déterminer A^n en fonction de n.

Partie B

1. Calculer P^{-1} et déterminer la matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.
3. En déduire une deuxième façon de calculer A^n en fonction de n.
4. Déterminer toutes les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $MD = DM$.
5. En déduire l'ensemble des matrices N telles que $NA = AN$ (Indication : Poser $M = P^{-1}NP$ et utiliser 2))
6. Déterminer toutes les matrices $Q \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = D$ (Indication : vérifier que $QD = DQ$ et utiliser 2))
7. En déduire l'ensemble des matrices R de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$ (Indication : poser $Q = P^{-1}RP$)

Exercice 2

On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n^2$$

2. a) Exprimer pour pour tout entier naturel k, $v_{k+1} - v_k$ fonction de u_k.

En déduire que $v_{k+1} - v_k \geqslant 2$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1, v_n - v_0 \geqslant 2n$, puis pour tout entier naturel n, $u_n^2 \geqslant 2n + 1$.
3) A l'aide du résultat précédent, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

On admet l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$

b) Déduire des questions précédentes que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\ln(n-1)$$

EXERCICE 3

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. (a) Etudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Etude d'une suite

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. (a) Etudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. (a) Démontrer : $\quad \forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$
   (b) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.
   (c) Montrer que pour tout entier n on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$$