DS 4. Le 2 mai 2016. 4h

Le devoir est probablement trop long pour être traité en entier donc ne vous précipitez pas.
Il n'est pas nécessaire de faire les choses dans l'ordre, ***à condition de clairement numéroter sur sa copie***
Ponctuellement, ***on peut admettre un résultat en l'indiquant clairement sur la copie*** *et l'utiliser ensuite .*
La rédaction (présentation et justification des résultats) est largement prise en compte dans la notation.

Bon courage !

Exercice 1. Questions « relativement »courtes

Chaque« grosse » question peut être traitée indépendamment des autres , ***sauf les deux premières****, qui sont liées.*

① Calculer, après avoir justifié la convergence, les sommes de séries suivantes :
(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$. (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$. (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$. (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

② On considère l'expérience suivante : on lance un dé équilibré jusqu'à obtenir 1. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'obtention du premier 1.
Par convention, on posera $X = 0$ si le premier 1 n'apparaît jamais.
On introduit les événements suivants :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, A_k$: « on fait 1 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $[X = n]$ en fonction d'événements A_k bien choisis. En déduire $\mathbb{P}(X = n)$.
(b) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = n) = 1$ en vous servant d'un des résultat de la question 1. Que peut-on en déduire de l'événement $[X = 0]$?
(c) Calculer l'espérance de X et la variance de X en vous servant de deux des résultats de la question 1.
(d) Donner l'expression de la fonction de répartition de X, notée F_X. On distinguera les cas $x < 1$ et $x \in [n; n+1[\,, n \in \mathbb{N}^*$
(e) On joue au jeu suivant : une fois l'expérience terminée et n le rang obtenu, on prépare un urne contenant n boules numérotées de 1 à n (indiscernables au toucher). On fait ensuite n tirages successifs **sans remise**. On gagne le jeu à condition de tirer tous les numéros dans l'ordre (d'abord 1, puis 2, etc..., pour finir par n). On note G le fait de gagner le jeu.
  i. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}_{X=n}(G)$.
  ii. En appliquant la formule de probabilités totales et en vous servant d'un des résultat de la question 1, calculer $\mathbb{P}(G)$.

③ Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 3z = 0 \\ 5x - 8y - 11z = 0 \end{cases}$

④ Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \dfrac{n}{2}\ln(x)$.

(a) Étudier les variations de g_n.
(b) Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.
(c) En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
(d) Montrer que : $1 \leqslant \alpha_n < e^2$.
(e) Justifier que $\ln(\alpha_n) = 2 - \dfrac{2}{n}\alpha_n$ et en déduire que $g_{n+1}(\alpha_n) = -\dfrac{\alpha_n}{n}$.
(f) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, puis qu'elle est convergente.
(g) Utiliser la relation de la question (e) afin de calculer sa limite.

Exercice 2. Fonctions, suites

Le but du problème est d'étudier, dans un premier temps, la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

puis de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, D la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ et Δ la droite d'équation $y = x$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne enfin les valeurs approchées à 10^{-1} près suivantes : $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,5$.

Partie A

I- Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$.

① Démontrer que $g'(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$, puis que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

② Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

③ En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

④ Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2;3]$, on a $0 < g(x) < \frac{1}{2}$.

II. Étude de la fonction principale

① Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (on pourra utiliser une propriété algébrique du logarithme) et en déduire que f est continue sur $\mathcal{D}_f$ en rédigeant soigneusement.

② Justifier que f est C^1 sur $]0;+\infty[$ et que $f'(x) = g(x)$ sur $]0;+\infty[$. En déduire le sens de variation de f. f est-elle C^1 sur $[0;+\infty[$?

③ Calculer des valeurs approchées de $f(2)$ et de $f(3)$ et en déduire que $f\left([2;3]\right) \subset [2;3]$. (on se servira de cette valeur pour le tracé à la fin de cette partie et pour la partie suivante).

④ Dire sur quelles intervalles f est convexe, concave et s'il y a des points d'inflexions.

⑤ Montrer que pour $x > 0$, on a : $f(x) - \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} - 1\right)$.

⑥ On rappelle la « célèbre »inégalité, qu'on pourra utiliser **sans démonstration** dans cet exercice :

$\forall h > 0$, on a : $h - \frac{h^2}{2} \leqslant \ln(1+h) \leqslant h$.

En choisissant judicieusement la valeur de h et en utilisant la question précédente, démontrer :

- ⋆ Que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D pour tout $x > 0$.
- ⋆ Que l'écart entre $\mathcal{C}_f$ et D tend vers 0 en $+\infty$.

⑦ Dans un repère orthonormé d'unité 2cm, tracer $\mathcal{C}_f$, D et Δ.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2;3]$.

① Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $h'(x) < 0$ (on remarquera que $h'(x) = g(x) - 1$).

② En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I ; on note α cette solution.

③ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n appartient à l'intervalle I.

④ Établir les inégalités suivantes, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

⑤ En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

⑥ Démontrer que pour $n \geqslant 7$, u_n est un valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3. Urnes et boules

Soient n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.
Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche et on appelle Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par B avant de tirer une boule blanche (s'il ne reste plus de boule noire lorsque B commence, on a donc $Y = 0$).
Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et que les tirages successifs ont donné une boule : « noire, blanche, noire, noire, noire, noire, blanche » alors :

- A a effectué deux tirages, il a retiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contient maintenant 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- B a effectué ensuite cinq tirages dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposé dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;
- X vaut 1 et Y vaut 4.

On pourra se servir, durant tout l'exercice, des événements suivants :

- ⋆ A_i : « le joueur A tire une boule blanche lors de son $i^{\text{ème}}$ tirage »
- ⋆ B_i : « le joueur B tire une boule blanche lors de **son** $i^{\text{ème}}$ tirage »

I. Étude d'un cas particulier $b = n = 2$.

Pour ce cas particulier on pourra s'aider d'un arbre pondéré, mais une bonne rédaction sera tout de même nécessaire. On suppose donc dans cette partie que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

① Donner les probabilités des évènements : $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$.

② En déduire l'espérance et vérifier que la variance de X vaut $\dfrac{5}{9}$.

③ Montrer, par la formule des probabilités totales que la probabilité de l'évènement $[Y = 0]$est donnée par : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \dfrac{1}{2}$

④ Pour tout entier i naturel **non nul**, déterminer les probabilités suivantes :

$\mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = i])$, $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = i])$, $\mathbb{P}([X = 2] \cap [Y = i])$.

⑤ En déduire que, pour tout entier i naturel **non nul** $\mathbb{P}([Y = i]) = \dfrac{1}{6}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^i + \left(\dfrac{1}{2}\right)^i\right)$.

Uniquement à l'aide de l'expression de $P([Y = i])$ en fonction de i, vérifier que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = i]) = 1$.

⑥ Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

II. Retour au cas général.

① Pour tout $k \in \{0; \ldots ; n\}$ calculer la probabilité $\mathbb{P}([X = k])$ **puis** vérifier que : $\mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$.

② Utiliser la question qui précède pour justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k+b-1}{b-1}=\binom{n+b}{b}$.

Indication : on pourra utiliser le changement d'indice suivant dans la somme des probabilités : $k \leftarrow n-k$ et bien réfléchir aux conséquences sur les indices de départ et de fin de la somme.

Par conséquent on vient de démontrer la formule : $\boxed{(\mathcal{S}) \qquad \forall N \in \mathbb{N}\,,\ \forall a \in \mathbb{N}\,, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\binom{k+a}{a}=\binom{N+a+1}{a+1}}$.

③ Soient $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Démontrer que $k\dbinom{k+a}{a}=(a+1)\dbinom{k+a}{a+1}$ puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^{N}k\binom{k+a}{a}=\sum_{k=1}^{N}k\binom{k+a}{a}=(a+1)\sum_{k=0}^{N-1}\binom{k+a+1}{a+1}\ .$$

④ À l'aide des questions précédentes, montrer que l'espérance de la variab1e $n-X$ est donnée par :

$E\left(n-X\right)=\dfrac{nb}{b+1}$. En déduire l'espérance de X, notée $E(X)$.

Indication : on pourra utiliser le théorème de transfert et, à nouveau, le changement d'indice $k \leftarrow n-k$.

⑤ Démontrer que $\mathbb{P}_{[X=k]}\left([Y=i]\right)=\left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i}\dfrac{b-1}{n-k+b-1}$ pour $i \geqslant 0$ et $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.

Calculer également $\mathbb{P}_{[X=n]}\left([Y=0]\right)$ et enfin $\mathbb{P}_{[X=n]}\left([Y=i]\right)$ pour $i \geqslant 1$.

⑥ Pour tout k de $X(\Omega)$, et pour tout entier i, non nul, justifier que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 1} i\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^{i-1}$ est convergente et déterminer sa somme.

⑦ Montrer que Y admet une espérance et vérifier que : $E\left(Y\right)=\dfrac{bn}{b^2-1}$.

Indication : on exprimera les termes $\mathbb{P}\left([Y=i]\right)$ à l'aide de la formule des probabilités totales, sans remplacer $\mathbb{P}\left([X=k]\right)$ par son expression, et, si tout se passe bien, on pourra conclure en voyant apparaître $E(n-X)$ à la fin du calcul !

DS 4. Correction

Exercice 1. ① (a) Série géométrique de raison $\frac{5}{6}$ donc convergente. La somme vaut $S_1 = 6$

(b) Série géométrique dérivée de raison $\frac{5}{6}$ donc convergente. La somme vaut $S_2 = 36$

(c) Après l'astuce du chef, somme d'une géométrique dérivée deux fois et d'une série géométrique, toutes deux de raison $\frac{5}{6}$ donc convergentes. La somme vaut $S_3 = 396$

(d) A une constante multiplicative près, série exponentielle. La somme vaut $S_4 = \frac{6}{5}\left(e^{\frac{5}{6}} - 1\right)$

② (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[X = n] = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n$.

Si on veut noter sans pointillés $[X = n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k\right) \cap A_n$.

Donc, par indépendance des lancers entre eux, et comme le dé est équilibré, on obtient :
$\mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$.

(b) La somme des probabilités existe par définition et vaut donc, par linéarité, $\frac{1}{6}S_1 = 1$.
L'événement $X = 0$ est donc négligeable (de probabilité nulle)

(c) L'espérance existe car la série de terme général $n\mathbb{P}(X = n) = n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$ est à terme positif et converge d'après le 1.(b). Par linéarité, la somme vaut $E(X) = \frac{1}{6}S_2 = 6$.

$E(X^2)$ existe car la série de terme général $n^2\mathbb{P}(X = n) = n^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$ est à terme positif et converge d'après le 1.(c). Par linéarité, la somme vaut $E(X^2) = \frac{1}{6}S_3 = 66$.

Donc $V(X)$ existe et, par la formule de Koenig-Huyghens, $V(X) = 66 - 36 = 30$.

(d) Voir le cours.

(e) i. Comme le tirage est sans remise et du fait de l'équiprobabilité à chaque tirage, la formule des probabilités composées donne $\mathbb{P}_{X=n}(G) = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{1}{n!}$

ii. On applique la formule des probabilité totale au SCE $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ dont le premier événement est négligeable, ce qui donne une série de terme général $\frac{1}{n!}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$, dont la somme vaut, par linéarité $\frac{1}{6}S_4 = \frac{1}{5}\left(e^{\frac{5}{6}} - 1\right)$.

③ Ce système possède deux pivots et, si on paramètre les solutions par z, l'ensemble des solutions peut s'écrire : $S = \{(-9z; -7z; z), z \in \mathbb{R}\}$.

④ (a) g_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ (théorèmes généraux) et, sur cet intervalle, $g_n'(x) = 1 + \frac{n}{2x} > 0$ donc g_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(b) Par somme de limites, $\lim_{x\to 0} g_n(x) = -\infty < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty > 0$.

(c) Si on ajoute que g_n est continue sur $]0; +\infty[$, on a, avec les résultats des deux questions précédentes, toutes les hypothèses pour conclure, via le théorème de la bijection.

(d) $g_n(1) = 1 - n \leqslant 0$ et $g_n(e^2) = e^2 - n + \frac{n}{2} \times 2\ln(e) = e^2 > 0$.

Donc $g_n(1) \leqslant g_n(\alpha_n) < g_n(e^2)$ et comme g_n est strictement croissante, on a le résultat demandé.

(e) $0 = g_n(\alpha_n) = \alpha_n - n + \frac{n}{2}\ln(\alpha_n) \iff \frac{2}{n}(-\alpha_n + n) = \ln(\alpha_n) \iff \ln(\alpha_n) = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$.

$g_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n - (n+1) + \frac{n+1}{2}\ln(\alpha_n) = \alpha_n - n - 1 + \frac{n+1}{2}\left(2 - \frac{2}{n}\alpha_n\right) = \alpha_n - n - 1 + (n+1)\left(1 - \frac{1}{n}\alpha_n\right) = \alpha_n - n - 1 + n + 1 - \alpha_n - \frac{1}{n}\alpha_n = -\frac{1}{n}\alpha_n < 0$.

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $g_{n+1}(\alpha_n) < 0 = g_{n+1}(\alpha_{n+1})$ donc, par stricte croissance de g_{n+1}, on a $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, donc la suite est strcitement croissante.
Comme elle est majorée par e^2, le théorème de convergence monotone prouve qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

(g) Par passage à la limite dans l'égalité donnée au début de la question (e), on obtient : $\ln(\ell) = 2 \iff \ell = \mathrm{e}^2$.

Exercice 2.
Partie A

I- Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{4}$.

① g est dérivable sur son ensemble de définition d'après les théorèmes généraux et, sur et ensemble :
$$g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x(x+2)-(x+2)^2+2x}{x(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-x^2-4x-4+2x}{x(x+2)^2} = -\frac{4}{x(x+2)^2} < 0,$$
donc g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

② On a $\ln(x+2)-\ln(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \ln(1) = 0$ par composition de limites, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{4}$. Donc la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

③ Par stricte décroissance de g et d'après le calcul précédent, on en déduit que $g(x) > \dfrac{1}{4} > 0$ sur $]0;+\infty[$.

④ Pour tout x de l'intervalle $[2;3]$, on a $0 < g(3) < g(x) \leqslant g(2)$. Or, $g(2) = \ln(4) - \ln(2) - \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} = \ln(2) + \dfrac{1}{4} \approx 0,7 - 0,25 = 0,45 < \dfrac{1}{2}$, d'où le résultat.

II. Étude de la fonction principale

① On trouve $f(2) = 2\ln(2) + 1 \approx 2,4$ et $f(3) = 3\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) + \dfrac{5}{4} \approx 2,75$.
Pour en déduire que $f([2;3]) \subset [2;3]$, il faut connaître les variations de f, ce qui nécessite de calculer la dérivée. Il y a donc un bug dans l'ordre des questions, le mérite me revenant. Désolé...
Admettons pour le moment que f est croissante, on a donc :
$2 \leqslant x \leqslant 3 \iff f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$ et les deux calculs précédents permettent de conclure.

② On a : $x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = x\ln(x+2) - x\ln(x)$ donc, par croissances comparées (pour le deuxième terme), on obtient $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$. Par somme de limites, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$, donc f est continue en 0. De plus, f est continue sur $]0;+\infty[$ d'après les théorèmes généraux donc, em bilan, f est continue sur $\mathcal{D}_f$.

③ f est C^1 sur $]0;+\infty[$ d'après les théorèmes généraux et pour $x > 0$,
$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x\left(\frac{\frac{-2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}}\right) + \frac{1}{4} = \ln(x+2) - \ln(x) + x\frac{-2}{x^2}\frac{x}{x+2} + \frac{1}{4} = g(x) > 0\ .$$
Donc f est strcitement croissante.
Par somme de limites, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} g(x) = +\infty$, donc, en vertu du théorème de prolongement, f n'est pas C^1 sur $[0;+\infty[$ (il faudrait une limite finie...).

④ f est concave sur $\mathcal{D}_f$ car $f'' = g' < 0$ et ne possède pas de point d'inflexion.

⑤ Soit $x > 0$, on a facilement : $f(x) - \left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{2}\right) = x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) - 2$
$$\text{D'autre part : } 2\left(\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} - 1\right) = 2\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\frac{x}{2} - 2 = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 2. \text{ D'où l'égalité.}$$

⑥ Soit $x > 0$. On choisit $h = \dfrac{2}{x} > 0$ et on obtient donc : $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \leqslant \dfrac{2}{x}$.
Par conséquent, d'après l'égalité obtenue à la question précédente :

$$2\left(\frac{\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x}}-1\right) \leqslant f(x)-\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{2}\right) \leqslant 2\left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}}-1\right) \iff -\frac{2}{x} \leqslant f(x)-\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{2}\right) \leqslant 0$$

L'inégalité de droite permet donc d'affirmer que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D pour tout $x>0$.

Le théorème des gendarmes ($\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x}=0$) permet d'affirmer que l'écart entre $\mathcal{C}_f$ et D tend vers 0 en $+\infty$.

⑦ A faire, éventuellement en vous aidant de géogébra ou d'une calculatrice, ou de Scilab...

Partie B

① Soit h la fonction définie sur I par $h(x)=f(x)-x$.

Soit $x \in I$, on a $h'(x)=f'(x)-1=g(x)-1<0$ car $g(x)<\frac{1}{2}$ sur I. Il y avait une erreur dans l'énoncé, c'est bien g et non g'...

② h est donc strictement décroissante sur I, continue sur I car f l'est et :
$h(2)=f(2)-2 \approx 2,4-2=0,4>0$ et $h(3)=f(3)-3 \approx 2,75-3=-0,25<0$.
D'après le théorème de la bijection l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution dans I, notée α.
On a donc $0=h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha \iff f(\alpha)=\alpha$

③ Démontrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n appartient à l'intervalle I.
On a bien $u_0=2\in I$. De plus, supposons $u_n\in I$ pour un certqin entier n. Alors, comme $u_{n+1}=f(u_n)\in f(I)\subset I$ inclusion démontrée dans la partie précédente.
Donc, par principe de récurrence, le résultat est vrai.

④ Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $u_n\in I$ et $\alpha\in I$. Comme h est C^1 sur I car f l'est et que $|f'(x)|=|g(x)|<\frac{1}{2}$ sur I d'après les questions précédentes, on applique l'IAF pour obtenir :
$|f(u_n)-f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \iff |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
Le résultat suivant est à démontrer par récurrence, em remarquant que $|u_0-\alpha|\leqslant|3-2|=1$ car $alpha\in I$.
La transmission est classique.
On a donc bien, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant|u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$

⑤ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, le théorème des gendarmes appliqué à la double inégalité précédente, donne $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

⑥ Si $n\geqslant 7$, on obtient $|u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}<\frac{1}{100}=10^{-2}$ donc u_n valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3.

I. Étude d'un cas particulier $b=n=2$.

On travaille d'abord sur les événements !

On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

① Probabilités des événements : $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$.

• $[X=0]=A_1$, donc $\mathbb{P}([X=0])=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, au premier tirage il y a deux boules noires et deux boules blanches dans l'urne.

• $[X=1]=\overline{A_1}\cap A_2$, donc $P([X=1])=\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)P_{\overline{A_1}}(A_2)$ or la composition de l'urne après le premier tirage est d'une boule noire et de deux boules blanches donc $\mathbb{P}([X=1])=\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

• $[X=2]=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3$, donc $\mathbb{P}([X=2])=\underbrace{\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)}_{\text{2n+2b}}\underbrace{\mathbb{P}_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)}_{\text{2n+1b}}\underbrace{\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}(A_3)}_{\text{2n}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{6}$.

$k=$	0	1	2
$\mathbb{P}([X=k])=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

. On vérifie que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

② $E(X) = 0\mathbb{P}([X=0]) + 1\mathbb{P}([X=1]) + 2\mathbb{P}([X=2]) = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ donc $\boxed{E(X) = \frac{2}{3}}$.

Enfin, $E(X^2) = 0^2\mathbb{P}([X=0]) + 1^2\mathbb{P}([X=1]) + 2^2\mathbb{P}([X=2]) = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{3} + 4\times\frac{1}{6} = 1$

et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

③ Les tirages de B dépendent de ceux de A : probabilités totales

$(X=0, X=1, X=2)$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}_{X=0}(Y=0) + \mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}_{X=1}(Y=0) + \mathbb{P}(X=2)\,\mathbb{P}_{X=2}(Y=0) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{2N1B}(Y=0) + \frac{1}{3}\mathbb{P}_{1N1B}(Y=0) + \frac{1}{6}\mathbb{P}_{1B}(Y=0) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{6}1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Car le conditionnement nous donne le contenu de l'urne pour les tirages de B.

④ Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

On a $\mathbb{P}(X=0\cap Y=i) = \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}_{X=0}(Y=i)$

Quand $X=0$, B effectue des tirages successifs avec remise parmi $1B$ et $2N$,

Donc $\mathbb{P}_{X=0}(Y=i) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_i}\cap A_{i+1}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{1}{3}$.

Donc : $\boxed{\mathbb{P}(X=0\cap Y=i) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{1}{3}}$

de même, quand $X=1$, B effectue des tirages successifs avec remise parmi $1B$ et $1N$, $\boxed{\mathbb{P}(X=1\cap Y=i) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^i\frac{1}{2}}$

Mais quand $X=2$, il ne reste qu'une blanche et pas de noires donc $\boxed{\mathbb{P}(X=2\cap Y=i) = 0}$

⑤ Soit $i \in \mathbb{N}^*$. $(X=0, X=1, X=2)$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=i) &= \mathbb{P}(X=0\cap Y=i) + \mathbb{P}(X=1\cap Y=i) + \mathbb{P}(X=2\cap Y=i) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^i\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^i\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i\right]
\end{aligned}$$

On vérifie la somme, dont la convergence est assurée

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=i) &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{6}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(3-1) + \frac{1}{6}(2-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1
\end{aligned}$$

Attention à traiter le premier terme (pour $i=0$) à part !

⑥ La convergence de $\sum_{i\geqslant 0} i\mathbb{P}(Y=i)$ équivaut à l'absolue convergence (tout est positif).

Or, le terme général de cette série est, à une constante multiplicative près, la somme de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Donc Y a une espérance et

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} i\mathbb{P}(Y=i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{2}{3}\right)^i + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{6}\frac{\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{1}{6}\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{6}\frac{2}{3}\times 9 + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\times 4 = \frac{4}{3}$$

II. Retour au cas général.

① On a $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ car X est le nombre de boules noires extraites de l'urne par A avant de tirer une boule blanche et qu'il y a n boules noires et b boules blanches dans l'urne avec $b \geqslant 1$. Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, $(X = k) = \overline{A}_1 \cap \dots \cap \overline{A}_k \cap A_{k+1}$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\overline{A}_1\right)\mathbb{P}_{\overline{A}_1}\left(\overline{A}_2\right)\dots\mathbb{P}_{\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_{k-1}}\mathbb{P}\left(\overline{A}_k\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A}_1\cap\dots\cap\overline{A}_k}\mathbb{P}(A_{k+1}) \\ &= \frac{n}{n+b} \times \frac{n-1}{n-1+b} \cdots \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+b} \times \frac{b}{n-k+b}\end{aligned}$$

car le conditionnement donne le nombre de boules noires restantes.

On le réécrit avec des factorielles : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\dfrac{n!}{(n-k)!}}{\dfrac{(n+b)!}{(n-k+b-1)!}} b = \dfrac{n!\,(n-k+b-1)!}{(n+b)!\,(n-k)!} b.$

D'autre part : $\dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = \dfrac{\frac{(n-k+b-1)!}{(b-1)!(n-k)!}}{\frac{(n+b)!}{b!n!}} = \dfrac{b!n!\,(n-k+b-1)!}{(n+b)!\,(b-1)!\,(n-k)!} = \mathbb{P}(X = k)$ car $b! = (b-1)!b$

② Comme X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$, on a donc :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 \iff \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1} = 1,$
comme $\binom{n+b}{b}$ est constante par rapport à k.
On obtient :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$
et on effectue le changement d'indice par $k \leftarrow n-k$ **qui inverse l'ordre d'indexation** mais ne change pas globalement les indices de départ et de fin. En effet, pour $k = 0$, on a $n-k = n$, pour $k = 1$, on a $n-k = n-1$, $\dots$ pour $k = n-1$, on a $n-k = 1$ et pour $k = n$, on a $n-k = 0$.
On obtient donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$.
D'où la formule proposée en posant $N = n$ et $b-1 = a$, ce qui est donc valable a priori pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{N}^*$ (car on suppose $n \geqslant 1, b \geqslant 2$). On v2rifie que la formule fonctionne également lorsque $a = 0$ (on a N+1=N+1) où lorsque $N = 0$ (on a 1=1).

③ Soients $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$.
On a $k\binom{k+a}{a} = k\dfrac{(k+a)!}{k!a!} = \dfrac{(k+a)!}{(k-1)!a!} = (a+1)\dfrac{(k+a)!}{(k-1)!\,(a+1)!} = (a+1)\binom{k+1}{a+1}$ donc $\boxed{k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{k+1}{a+1}}$
Notons S cette somme. On obtient, en remarquant que le terme de rang 0 est nul, puis en effectuant le changement d'indice $k \leftarrow k+1$:
$\displaystyle S = \sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = \sum_{k=1}^{N} k\binom{k+a}{a} \sum_{k=0}^{N-1} (a+1)\binom{k+a+1}{a+1}$
Puis, par linéarité et en appliquant la formule obtenue dans la question précédente (avec $N-1 \in \mathbb{N}$ (car on suppose $N \geqslant 1$) à la place de N et $a+1$ à la place de a) :
$\displaystyle S = (a+1)\sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1} = (a+1)\binom{N-1+a+2}{a+2} = (a+1)\binom{N+a+1}{a+2}$.
En bilan, on a : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\binom{N+a+1}{a+2}}$.

④ L'espérance existe car X est une variable aléatoire finie et, par le théorème de transfert :
$\displaystyle E(n-X) = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\,P([X=k]) = \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n-k+b-1}{b-1} \underset{k\leftarrow n-k}{=} \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^{n} k\binom{k+b-1}{b-1}$
Donc, d'après la question précédente ($n = N$, $a = b-1$ donc $a+1 = b$) :
$E(n-X) = \dfrac{b\binom{n+b}{b+1}}{\binom{n+b}{b}} = b\dfrac{(n+b)!}{(b+1)!\,(n-1)!}\dfrac{n!b!}{(n+b)!} = \dfrac{bn}{b+1}.$

⑤ Quand $X = k$, il reste $n-k$ boules noires et $b-1$ boules blanches pour les tirage du joueur B

Les tirages, averc remise, sont donc indépendants et, à chauqe tirage, la probabilité de tirage d'une boule blanche est de $\dfrac{b-1}{n-k+b-1}$ et celle d'une boule noire est $\dfrac{n-k}{n-k+b-1}$.
Dans le cas particulier $X = n$, le joueur B donc certain de tirer la boule blanche du premier coup donc $\mathbb{P}_{X=n}(Y=0) = 1$ et $\mathbb{P}_{X=n}(Y=i) = 0$ pour $i > 0$.

Sinon, pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ et $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{X=k}(Y=i) = \mathbb{P}\left(\overline{B}_1 \cap \ldots \overline{B}_i \cap B_{i+1}\right) = \left(\dfrac{n-k}{n-k+b-1}\right)^i \dfrac{b-1}{n-k+b-1}$.

⑥ $0 \leqslant q = \dfrac{n-k}{n-k+b-1} < 1$ donc la série $\sum_{i\geqslant 1} iq^{i-1}$ converge et $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2} = \left(\frac{n-k+b-1}{b-1}\right)^2$

⑦ Par la formule des probabilités totales avec $(X=k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'événements,

$$\mathbb{P}(Y=i) = \mathbb{P}(X=n \cap Y=i) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X=k \cap Y=i)$$

que l'on ne cherche pas à expliciter... pour pouvoir recycler les questions précédentes. Comme il y a convergence absolue partout, on peut permuter les sommes (!!).

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\left[\mathbb{P}(X=n\cap Y=i) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k\cap Y=i)\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} i\mathbb{P}(X=n\cap Y=i) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{+\infty} i\mathbb{P}(X=k\cap Y=i)\\
&= 0 + \sum_{i=1}^{+\infty} 0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty} i\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}_{X=k}(Y=i)\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{+\infty} i\overbrace{\mathbb{P}(X=k)}^{\text{constante } / \ i}\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}\overbrace{\frac{n-k}{n-k+b-1}\,\frac{b-1}{n-k+b-1}}^{\text{constante } / \ i}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)\frac{(n-k)(b-1)}{(n-k+b-1)^2}\sum_{i=0}^{+\infty} i\left(\frac{n-k}{n-k+b-1}\right)^{i-1}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)\frac{(n-k)(b-1)}{(n-k+b-1)^2}\left(\frac{n-k+b-1}{b-1}\right)^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)\frac{n-k}{b-1}\\
&= \frac{1}{b-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)(n-k) = \frac{1}{b-1}E(n-X) \quad \text{(transfert !)}\\
&= \frac{1}{b-1}\frac{bn}{b+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } E(Y) = \frac{bn}{b^2-1}}$$