

**1) Exercice 1**

Partie A.

1)  $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$

2)  $X^n = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + aX + b$  (Division euclidienne). En évaluant  $X^n$  en 1 et 2, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases}$$

Donc  $a = 2^n - 1$  et  $b = 2 - 2^n$ 

3)  $A^2 - 3A + 2I = 0_3$

En isolant  $I$ , on obtient :  $A\left(\frac{3I-A}{2}\right) = I$ .

$$\text{Donc } A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4) On a  $0_3 = A^2 - 3A + 2I = (A - I)(A - 2I)$

 $A - I$  ne peut être inversible sinon on aurait  $A - 2I = (A - I)^{-1}0_3 = 0_3$ , soit  $A = 2I$ . Ceci est impossible car  $A \neq 2I$ .De même si  $A - 2I$  est inversible, on aurait  $A - I = (A - 2I)^{-1}0_3 = 0_3$ , soit  $A = I$ .Ceci est impossible car  $A \neq I$ .Donc  $A - I$  et  $A - 2I$  ne sont pas inversibles

5) D'après 2) on a  $X^n = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n$ .

En évaluant  $X^n$  en  $A$ , on obtient

$$A^n = Q(A)(A^2 - 3A + 2I) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I.$$

$$\text{Or } A^2 - 3A + 2I = 0_3, d'où A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I.$$

$$\text{Donc } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n & 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Partie B :

Calculons  $P^{-1}$  avec la méthode de Jordan-Gauss

1)  $\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$L_2 \leftrightarrow L_1 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Comme aucun coefficient diagonal n'est nul, la matrice  $P$  est inversible. On poursuit :

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :  $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$ .

Vérifions que  $P^{-1}AP$  est diagonale.

$$\begin{aligned} \text{En effet, on a : } P^{-1}AP &= P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc il existe une matrice diagonale  $D$  telle que

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Montrons que  $A^k = PD^kP^{-1}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Vous devrez être capable de le faire.

3) D'après 2) on a  $A^n = PD^nP^{-1}$ , or  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2^n \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4) On pose  $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & b \\ g & h & i \end{pmatrix}$ . On a :  $MD = DM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$   
 $\Leftrightarrow c = f = g = h = 0 \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

En renommant les lettres, les matrices telles que  $MD = DM$  sont les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$$

5) On a :  $NA = AN \Leftrightarrow P^{-1}NAP = P^{-1}ANP$

$$\Leftrightarrow (P^{-1}NP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)(P^{-1}NP)$$

On pose  $M = P^{-1}NP$ , on obtient :

$$NA = AN \Leftrightarrow MD = DM.$$

Donc  $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$  où  $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ . Donc  $N = \begin{pmatrix} -c+d & c & c \\ -a+b+e & a & a-e \\ -c+d-e & c & c+e \end{pmatrix}$  avec  $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$

### Ne pas faire la 6) et 7)

6)  $Q^2 = D \Rightarrow QD = QQ^2 = Q^2Q = DQ$ .

On a :  $QD = DQ$ , donc  $Q$  est de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \text{ d'après 4)}$$

On reprend, on a :

$$\begin{aligned} Q^2 = D &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd & 0 \\ ac+cd & bc+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc = bc+d^2 = 1 \\ ab+bd = ac+cd = 0 \\ e = -\sqrt{2} \text{ ou } e = \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

(1) donne :  $a^2 = d^2$  et  $a^2 + bc = 1$  c'est à dire  $(a+d)(a-d) = 0$  et  $a^2 + bc = 1$

(2) donne :  $b(a+d) = c(a+d) = 0$

Si  $a+d \neq 0$ , ça a  $d, d \neq -a$  on a :

(2)  $\Rightarrow b = c = 0$  et (1)  $\Rightarrow d = a$  et  $a^2 = 1$

Dans ce cas :  $Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$  avec  $a \in \{-1, 1\}$  et  $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Si  $a+d = 0$ , c'est à dire,  $d = -a$ .

(1) et (2) donnent :  $d = -a$  et  $a^2 + bc = 1$

si  $b \neq 0$ , on obtient  $d = -a$  et  $c = \frac{1-a^2}{b}$ .

- Si  $c \neq 0$ , on obtient :  $d = -a$  et  $b = \frac{1-a^2}{c}$ .

Donc en résumé :

si  $a+d = 0$ .

$Q$  est de la forme :  $\begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{b} & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , et  $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$  ou  $Q$  est de la forme

$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{1-a^2}{b} & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$  où  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  et  $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$  Finalement les solutions de  $Q^2 = D$  sont de la forme :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \{-1, 1\} \text{ et } e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, Q_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{1-a^2}{b} & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{b} & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \text{ et } e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

et réciproquement : Si  $Q$  est de l'une de ces formes on a  $Q^2 = D$ .

$$7) R^2 = A \Leftrightarrow Q^2 = D \quad (Q = P^{-1}RP)$$

Donc  $R$  est de la forme :  $PQ_1P^{-1}, PQ_2P^{-1}, PQ_3P^{-1}$ .

$Q_1, Q_2$  et  $Q_3$  sont les matrices introduites dans 6).

$$\text{Donc } R_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -a+e & a & a-e \\ a-e & 0 & e \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \{-1; 1\} \text{ et } e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, R_2 = \begin{pmatrix} -a-b & b & b \\ \frac{-a^2-ab+be+1}{b} & a & a-e \\ -a-b-e & b & b+e \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \frac{a^2-ab-1}{b} & \frac{-a^2+1}{b} & \frac{-a^2+1}{b} \\ -a+b+e & a & a-e \\ \frac{a^2-ab-be-1}{b} & \frac{-a^2+1}{b} & \frac{-a^2+be+1}{b} \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \text{ et } e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

## EXERCICE 2

1. Par récurrence on doit d'abord montrer que  $u_n$  est définie avant de regarder son signe :

(a) ★ Pour  $n = 0$  est-ce que  $u_0$  est défini et strictement positif? Oui car  $u_0 = 1$

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n$  défini et strictement positif.

Alors  $u_n + \frac{1}{u_n}$  est bien défini car  $u_n \neq 0$  et est strictement positif.

★ Donc par récurrence, chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

(b) On a donc pour tout entier  $n : u_{n+1} > u_n$  car  $1/u_n > 0$ , et la suite  $u$  est donc croissante.

2. (a) On a

$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$

(b) Par récurrence :

★ Est-ce que, pour  $n = 1$ ,  $u_1^2 = 2 \cdot 1 + 1 + \sum_{k=0}^0 \frac{1}{u_k^2}$ ?

Or  $\sum_{k=0}^0 \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{u_0^2} = 1$  et  $u_1^2 = 2^2 = 4$  donc oui!

★ Soit  $n \geq 1$  tel que  $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ .

Est-ce que  $u_{n+1}^2 = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k^2}$ ?

Or  $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} + 2 + \frac{1}{u_n^2} = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k^2}$

★ Donc la formule est vraie pour tout entier  $n \geq 1$

**Variante :** en voyant la somme telescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 = u_n^2 - 1 \text{ d'une part et d'autre part}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} 2 + \frac{1}{u_k^2} = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

donc  $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

(c) Or  $1/u_k^2 \geq 0$  donc  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k^2} \geq 0$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$ .

Finalement, comme  $2n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , par minoration  $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $u_n = |u_n| = \sqrt{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

3. (a) On veut majorer  $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$  et pour cela, minorer  $\frac{1}{u_k^2}$  :

Pour tout  $n : u_n^2 \geq 2n + 1 > 2n$  donc  $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{2n}$  si  $n > 0$  (si  $n \geq 1$ ) le terme pour  $n = 0$  est donc à garder à part.

Donc 
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2}v_{n-1}$$
 si  $n - 1 \geq 1$  i.e.  $n \geq 2$

D'où

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 1 + 1 + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

Conclusion :  $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}$  pour tout  $n \geq 2$

(b) Et comme  $v_n \leq 1 + \ln(n)$  pour tout entier  $n \geq 2$  on a donc  $v_{n-1} \leq 1 + \ln(n - 1)$

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1 + \ln(n - 1)}{2} = 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n - 1)}{2}.$$

### EXERCICE 3

On considère la fonction  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = e^x - e \ln(x)$ .

#### Partie I : Etude de la fonction $f$

1. (a) Les fonctions  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto \ln(x)$  étant deux fois dérivables sur  $]0; +\infty[$ , la fonction  $f$  l'est aussi.

On a pour tout  $x > 0$  :  $f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$  et  $f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$ .

(b) Évidemment pour tout  $x > 0$ , on a  $f''(x) > 0$  donc  $f'$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

On a :  $f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$  (car  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ ),  $f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $f'(1) = e^1 - e/1 = 0$ .

D'où le tableau de variations de  $f'$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	+
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

2. On a :  $f(x) = e^x - e \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  (car  $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ ),

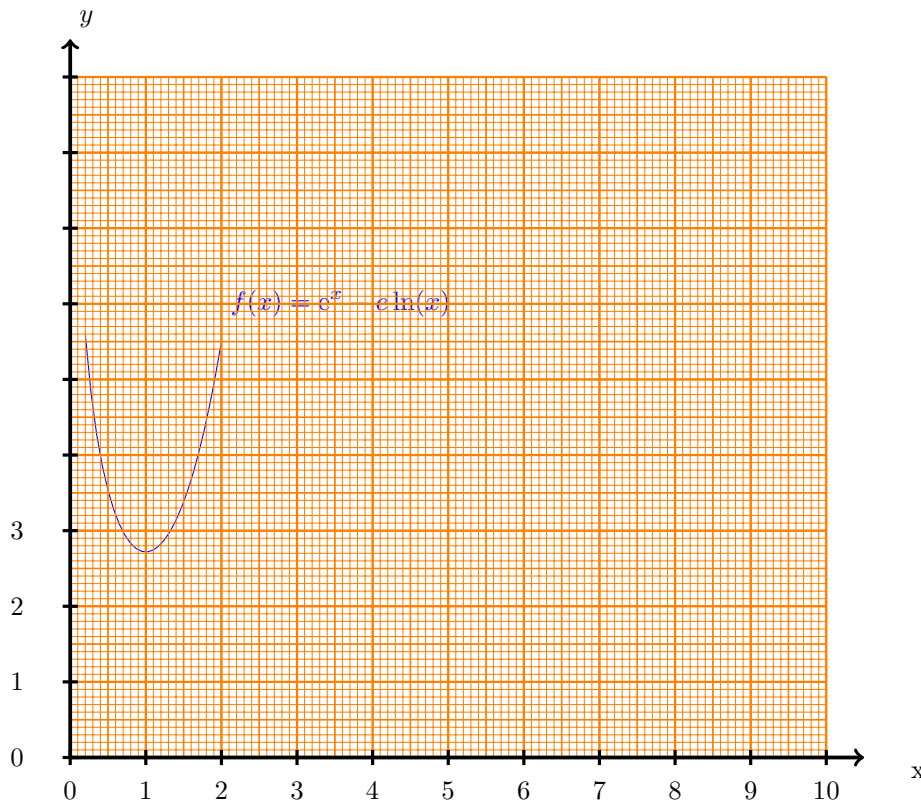
$$f(x) = e^x \left(1 - e \cdot \frac{\ln(x)}{e^x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$
 (croissances comparées de  $\ln(x)$  et  $e^x$ )

et  $f(1) = e^1 - e \ln(1) = e$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $e$ $\nearrow$	$+\infty$

D'où le tableau de variations de  $f$  :

3. En  $+\infty, \ln(x)$  est négligeable devant  $e^x$  (c'est à dire  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$ ) donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} = 1$ .



4. (a)  $u$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $u'(x) = (f'(x) - x)' = f''(x) - 1$ .  
 Et comme pour tout  $x > 0 : f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > e^x > 1$ , de plus on a  $u'(x) = f''(x) - 1 > 0$  sur  $]0; +\infty[$ .  $u$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

(b)  $u$  est continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ ,  
 on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \infty e^x - \frac{e}{x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \infty e^x (1 - \frac{e}{x \cdot e^x} - \frac{x}{e^x}) = +\infty$ ,  
 donc  $u$  s'annule une et une seule fois dans  $]0; +\infty[$ .

De plus :  $u(1) = -1 < 0$  et  $u(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 > 7,3 - 1,4 - 2 > 0$ , donc la solution (notée  $\alpha$  par l'énoncé) des équations équivalentes  $u(x) = 0$  et  $f'(x) = x$  est dans l'intervalle  $]1; 2[$ . On a bien  $1 < \alpha < 2$ .

### Partie II : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 2$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$

5. Les variations de  $f$  montrent que pour tout  $x > 0 : f(x)$  existe et  $f(x) \geq e$ .

Par récurrence :

- **initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a bien  $u_0 = 2$  qui existe et est bien supérieur ou égal à 2.
- **hérédité** : Comme  $u_n \geq 2 > 0$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien défini et  $u_{n+1} = f(u_n) \geq e \geq 2$
- **conclusion** : Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 2$ .

6. (a)  $g$  est dérivable sur  $[2; +\infty[$  et  $g'(x) = (f(x) - x)' = f'(x) - 1$ .  
 Or  $f'$  est croissante sur  $[2; +\infty[$ , donc si  $x \geq 2$  :

$$g'(x) = f'(x) - 1 \geq f'(2) - 1 = e^2 - \frac{e}{2} - 1 \geq 7,3 - \frac{2,8}{2} - 1 = 4,9 > 0.$$

$g$  est donc strictement croissante sur  $[2; +\infty[$ .

(b)  $g$  est croissante sur  $[2; +\infty[$  et  $g(2) = f(2) - 2 \geq e - 2 > 0$  donc, pour tout  $x \geq 2$ ,  $g(x) > 0$  et  $f(x) > x$ .

Or pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 2$  donc  $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

7. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant croissante, elle est convergente ou elle tend vers  $+\infty$ .

Démontrons par l'absurde qu'elle n'est pas convergente :

Comme  $u_n \geq 2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , si la suite  $(u_n)$  admettait une limite finie  $L$ , on aurait  $L \geq 2$  et  $f$  continue en  $L$  donc on aurait aussi  $f(L) = \lim f(u_n) = \lim(u_{n+1}) = \lim(u_n) = L$ .

Comme d'après 6.(b), l'équation  $f(L) = L$  n'a pas de solution dans  $[2; +\infty[$ , une telle limite  $L$  n'est pas possible, donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente et on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

8. (a) •  $2 \ln(x) \leq x$  : En posant  $h(x) = 2 \ln(x) - x$ , on a  $h'(x) = 2/x - 1 < 0$  sur  $[2; +\infty[$ .

Donc  $h$  est décroissante et pour tout  $x \geq 2$  :  $h(x) \leq h(2) = 2 \ln(2) - 2 < 2 * 0,6 - 2 < 0$ . cqfd.

•  $x \leq \frac{e^x}{3}$  : En posant  $k(x) = x - \frac{e^x}{3}$ , on a  $k'(x) = 1 - \frac{e^x}{3} < 1 - \frac{2,7}{3} < 0$  sur  $[2; +\infty[$ .

Donc  $k$  est décroissante et pour tout  $x \geq 2$  :  $k(x) \leq k(2) = 2 - \frac{e^2}{3} < 2 - \frac{7,3}{3} < 0$ . cqfd.

On a donc démontré :  $\forall x \in [2; +\infty[, 2 \ln(x) \leq x \leq \frac{e^x}{3}$ .

(b)  $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e * \ln(u_n)$ .

D'après ce qui précède :  $e^{u_n} \geq 3 * u_n$  et  $\ln(u_n) \leq \frac{u_n}{2}$  donc  $-e * \ln(u_n) \geq -e * \frac{u_n}{2}$ .

On obtient alors, en ajoutant les 2 inégalités :

$$u_{n+1} = e^{u_n} - e * \ln(u_n) \geq 3 * u_n - e * \frac{u_n}{2} = \frac{6 - e}{2} * u_n.$$

(c) Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \frac{6 - e}{2} u_n > 0$ , on a aussi :

$$0 < \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{2}{6 - e} * \frac{1}{u_n}.$$

On pourrait alors démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{u_n} \leq \left(\frac{2}{6 - e}\right)^n * \frac{1}{u_0}$