1) Exercice 1

Partie A.

1) $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$

2) $X^n=Q(X)\left(X^2-3X+2\right)+aX+b$ (Division euclidienne). En évaluant X^n en 1 et 2 , on obtient le systéme :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ 2a+b=2^n \end{array}\right.$$

Donc $a=2^n-1$ et $b=2-2^n$

3) $A^2-3A+2I=0_3$

En isolant I, on obtient : $A\left(\frac{3I-A}{2}\right)=I$.

Donc $A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A)=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1/2 \end{array}\right)$

4) On a $0_3=A^2-3A+2I=(A-I)(A-2I)$

$A-I$ ne peut être inversible sinon on aurait $A-2I=(A-I)^{-1}0_3=0_3$, soit $A=2I$. Ceci est impossible car $A\neq 2I$.

De même si $A-2I$ est inversible, on aurait $A-I=(A-2I)^{-1}0_3=0_3$, soit $A=I$.

Ceci est imposible car $A\neq I$.

Donc $A-I$ et $A-2I$ ne sont pas inversibles

5) D'après 2) on a $X^n=Q(X)\left(X^2-3X+2\right)+\left(2^n-1\right)X+2-2^n$.

En évaluant X^n en A, on obtient

$$\begin{gathered} A^n=Q(A)\left(A^2-3A+2I\right)+\left(2^n-1\right)A+\left(2-2^n\right)I. \\ \text{Or } A^2-3A+2I=O_3, d'\circ=A^n=\left(2^n-1\right)A+\left(2-2^n\right)I. \end{gathered}$$

Donc $A^n=\left(\begin{array}{lll} 1 & 0 & 0 \\ 2^n & 1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 0 & 2^n \end{array}\right)$

$$A^n=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2^n-1 & 1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 0 & 2^n \end{array}\right)$$

Partie B :

Calculons P^{-1} avec la méthode de Jordan-Gauss

1) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$L_2 \leftrightarrow L_1\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3-L_2\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Comme aucun coefficient diagonal n'est nul, la matrice P est inversible. On poursuit :

$$L_1 \leftarrow L_1+L_3\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$.

Vérifions que $P^{-1}AP$ est diagonale.

$$\begin{aligned} \text{En effet, on a : } P^{-1}AP &= P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc il existe une matrice diagonale D telle que

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Montrons que $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Vous devrez être capable de le faire.

3) D'après 2) on a $A^n = PD^nP^{-1}$, or $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2^n \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n-1 & 1 & 1-2^n \\ 1-2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & b \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a : $MD = DM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 2c & \\ d & e & 2 & f \\ g & h & 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow c = f = g = h = 0 \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

En renomant les lettres, les matrices telles que $MD = DM$ sont les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (a, b, c, d, e) \in R^5$$

5) On a : $NA = AN \Leftrightarrow P^{-1}NAP = P^{-1}ANP$

$$\Leftrightarrow \left(P^{-1}NP\right)\left(P^{-1}AP\right) = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}NP\right)$$

On pose $M = P^{-1}NP$,on obtient :

$$NA = AN \Leftrightarrow MD = DM.$$

Donc $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$. Donc $N = \begin{pmatrix} -c+d & c & c \\ -a+b+e & a & a-e \\ -c+d-e & c & c+e \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d,e) \in R^5$

Ne pas faire la 6) et 7)

6) $Q^2 = D \Rightarrow QD = QQ^2 = Q^2Q = DQ$.

On a : $QD = DQ$, donc Q est de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 d'apres4 \Bigg)$$

On reprend, on a :

$$\begin{aligned} Q^2 = D &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd & 0 \\ ac+cd & bc+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc = bc+d^2 = 1 \\ ab+bd = ac+cd = 0 \\ e = -\sqrt{2} \text{ on e } = \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

(1) donne : $a^2 = d^2$ et $a^2 + bc = 1$ c'est à dire $(a+d)(a-d) = 0$ et $a^2 + bc = 1$

(2) donne : $b(a+d) = c(a+d) = 0$

Si $a + d \neq 0, ca$ a $d, d \neq$-a on a :

(2) $\Rightarrow b = c = 0$ et (1) $\Rightarrow d = a$ et $a^2 = 1$

Dans ce cas : $Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec $a \in \{-1, 1\}$ et $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Si $a + d = 0, c'estàdire, d = -a.$

(1) et (2) donnent : $d = -a$ et $a^2 + bc = 1$

si $b \neq 0$, on obtient $d = -a$ et $c = \frac{1-a^2}{b}$.

- Si $c \neq 0$, on obtient : $d = -a$ et $b = \frac{1-a^2}{c}$.

Donc en résumé :

si $a + d = 0$.

Q est de la forme : $\begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{b} & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ou Q est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{1-a^2}{b} & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ oa $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $\in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ Finalement les solutions de $Q^2 = D$ sont de la forme :

$Q_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec $a \in \{-1; 1\}$ et $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{1-a^2}{b} & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

$Q_3 = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{b} & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

et réciproquement : Si Q est de l'une de ces formes on a $Q^2 = D$.
7) $R^2 = A \Leftrightarrow Q^2 = D \quad (Q = P^{-1}RP)$
Donc R est de la forme : $PQ_1P^{-1}, PQ_2P^{-1},\ PQ_3P^{-1}$.
Q_1, Q_2 et Q_3 sont les matrices introduites dans 6).
Donc $R_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -a+e & a & a-e \\ a-e & 0 & e \end{pmatrix}$ avec $a \in \{-1;1\}$ et $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $R_2 = \begin{pmatrix} -a-b & b & b \\ \frac{-a^2-ab+be+1}{b} & a & a-e \\ -a-b-e & b & b+e \end{pmatrix}$
$R_3 = \begin{pmatrix} \frac{a^2-ab-1}{b} & \frac{-a^2+1}{b} & \frac{-a^2+1}{b} \\ -a+b+e & a & a-e \\ \frac{a^2-ab-be-1}{b} & \frac{-a^2+1}{b} & \frac{-a^2+be+1}{b} \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et $e \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

EXERCICE 2

1. Par récurrence on doit d'abord montrer que u_n est définie avant de regrarder son signe :
   (a) ⋆ Pour $n = 0$ est-ce que u_0 est défini et strictement positif ? Oui car $u_0 = 1$
   ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n défini et strictement positif.
   Alors $u_n + \dfrac{1}{u_n}$ est bien défini car $u_n \neq 0$ et est strictement positif.
   ⋆ Donc par récurrence, chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
   (b) On a donc pour tout entier n : $u_{n+1} > u_n$ car $1/u_n > 0$, et la suite u est donc croissante.
2. (a) On a
$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$
   (b) Par récurrence :
   ⋆ Est-ce que, pour $n = 1$, $u_1^2 = 2 \cdot 1 + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{u_k^2}$?
   Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{u_0^2} = 1$ et $u_1^2 = 2^2 = 4$ donc oui !
   ⋆ Soit $n \geq 1$ tel que $u_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   Est-ce que $u_{n+1}^2 = 2(n+1) + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2}$?
   Or $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2} = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} + 2 + \frac{1}{u_n^2}. = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2}$
   ⋆ Donc la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$

   Variante : en voyant la somme telescopique :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= u_n^2 - 1 \text{ d'une part et d'autre part} \\ \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} 2 + \frac{1}{u_k^2} = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$
   donc $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$
   (c) Or $1/u_k^2 \geqslant 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2} \geqslant 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geqslant 2n+1$.
   Finalement, comme $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, par minoration $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et $u_n = |u_n| = \sqrt{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$

3. (a) On veut majorer $u_n^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ et pour cela, minorer $\frac{1}{u_k^2}$:

   Pour tout n : $u_n^2 \geqslant 2n+1 > 2n$ donc $\dfrac{1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{2n}$ si $n>0$ (si $n \geqslant 1$) le terme pour $n=0$ est donc à garder à part.

   Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} v_{n-1}$ si $n-1 \geqslant 1$ i.e. $n \geqslant 2$

   D'où
$$u_n^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leqslant 2n+1+1+\frac{1}{2} v_{n-1}$$

   Conclusion : $\boxed{u_n^2 \leqslant 2n+2+\frac{1}{2} v_{n-1} \text{ pour tout } n \geqslant 2}$

   (b) Et comme $v_n \leqslant 1+\ln(n)$ pour tout entier $n \geqslant 2$ on a donc $v_{n-1} \leqslant 1+\ln(n-1)$
$$u_n^2 \leqslant 2n+2+\frac{1+\ln(n-1)}{2} = 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}.$$

EXERCICE 3

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$.

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ étant deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$,la fonction f l'est aussi.

   On a pour tout $x>0$: $\boxed{f'(x) = e^x - \dfrac{\mathrm{e}}{x}}$ et $\boxed{f''(x) = e^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2}}$.

   (b) Évidemment pour tout $x>0$, on a $f''(x)>0$ donc f' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   On a : $f'(x) = e^x - \dfrac{\mathrm{e}}{x} \underset{0^+}{\to} -\infty$ (car $\dfrac{1}{x} \underset{0^+}{\to} +\infty$) , $f'(x) = e^x - \dfrac{\mathrm{e}}{x} \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et $f'(1) = e^1 - e/1 = 0$.

   D'où le tableau de variations de f' :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a : $f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x) \underset{0^+}{\to} +\infty$ (car $\ln(x) \underset{0^+}{\to} -\infty$) ,

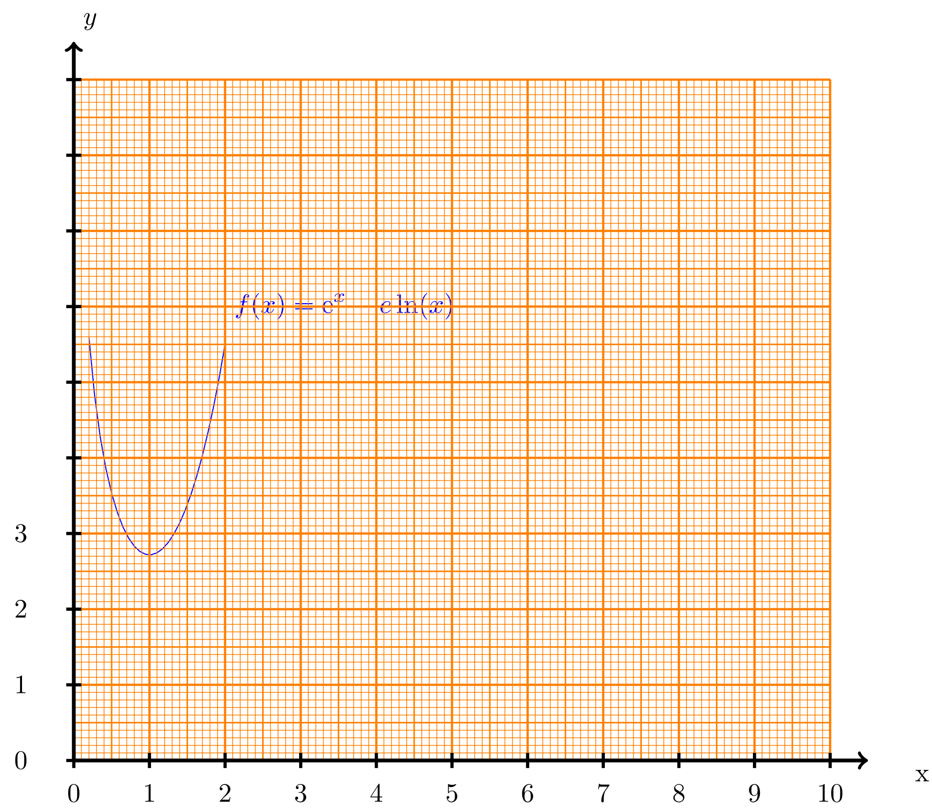
   $f(x) = e^x(1 - \mathrm{e}.\dfrac{\ln(x)}{e^x}) \underset{+\infty}{\to} +\infty$ (croissances comparées de $\ln(x)$ et e^x)

   et $f(1) = e^1 - e\ln(1) = e$.

   D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. En $+\infty$,$\ln(x)$ est négligeable devant e^x (c'est à dire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$) donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = 1$.



4. (a) u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x) = (f'(x) - x)' = f''(x) - 1$.
Et comme pour tout $x > 0$: $f''(x) = e^x + \dfrac{\text{e}}{x^2} > e^x > 1$,de plus on a $u'(x) = f''(x) - 1 > 0$ sur $]0;+\infty[$. $\boxed{\text{u est donc strictement croissante sur }]0;+\infty[.}$

(b) u est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$,
on a $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = -\infty$ et $\lim x{+}\infty u(x) = \lim x{+}\infty e^x - \dfrac{\text{e}}{x} - x = \lim x{+}\infty e^x(1 - \dfrac{\text{e}}{x.e^x} - \dfrac{x}{e^x}) = +\infty$,
donc $\boxed{\text{u s'annule une et une seule fois dans }]0;+\infty[.}$

De plus : $u(1) = -1 < 0$ et $u(2) = e^2 - \dfrac{\text{e}}{2} - 2 > 7,3 - 1,4 - 2 > 0$, donc la solution (notée α par l'énoncé) des équations équivalentes $u(x) = 0$ et $f'(x) = x$ est dans l'intervalle $]1;2[$. On a bien $\boxed{1 < \alpha < 2.}$

Partie II : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

5. Les variations de f montrent que pour tout $x > 0$: $f(x)$ existe et $f(x) \geqslant \text{e}$.
Par récurrence :

- initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 2$ qui existe et est bien supérieur ou égal à 2.
- hérédité : Comme $u_n \geqslant 2 > 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant \text{e} \geqslant 2$
- conclusion : Pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

6. (a) g est dérivable sur $[2;+\infty[$ et $g'(x) = (f(x) - x)' = f'(x) - 1$.
Or f' est croissante sur $[2;+\infty[$,donc si $x \geqslant 2$:

$$g'(x) = f'(x) - 1 \geqslant f'(2) - 1 = e^2 - \frac{e}{2} - 1 \geqslant 7,3 - \frac{2,8}{2} - 1 = 4,9 > 0.$$

$\boxed{\text{g est donc strictement croissante sur } [2;+\infty[.}$

(b) g est croissante sur $[2;+\infty[$ et $g(2) = f(2) - 2 \geqslant \text{e} - 2 > 0$ donc ,pour tout $x \geqslant 2$, $g(x) > 0$ et $f(x) > x$.
Or pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$ donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$.
$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante , elle est convergente ou elle tend vers $+\infty$.
   Démontrons par l'absurde qu'elle n'est pas convergente :
   Comme $u_n \geqslant 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, si la suite (u_n) admettait une limite finie L ,on aurait $L \geqslant 2$ et f continue en L donc on aurait aussi $f(L) = \lim f(u_n) = \lim(u_{n+1}) = \lim(u_n) = L$.
   Comme d'après 6.(b) , l'équation $f(L) = L$ n'a pas de solution dans $[2;+\infty[$,une telle limite L n'est pas possible , donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et on a donc $\boxed{\lim n{+}\infty u_n = +\infty}$

8. (a) • $2\ln(x) \leqslant x$: En posant $h(x) = 2\ln(x) - x$, on a $h'(x) = 2/x - 1 < 0$ sur $[2;+\infty[$.
   Donc h est décroissante et pour tout $x \geqslant 2$: $h(x) \leqslant h(2) = 2\ln(2) - 2 < 2 * 0,6 - 2 < 0$. cqfd.

   • $x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$: En posant $k(x) = x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$, on a $k'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{3} < 1 - \dfrac{2,7}{3} < 0$ sur $[2;+\infty[$.
   Donc k est décroissante et pour tout $x \geqslant 2$: $k(x) \leqslant k(2) = 2 - \dfrac{\mathrm{e}^2}{3} < 2 - \dfrac{7,3}{3} < 0$. cqfd.

   On a donc démontré : $\boxed{\forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}.}$

   (b) $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - \mathrm{e} * \ln(u_n)$.
   D'après ce qui précède : $e^{u_n} \geqslant 3 * u_n$ et $\ln(u_n) \leqslant \dfrac{u_n}{2}$ donc $-\mathrm{e} * \ln(u_n) \geqslant -\mathrm{e} * \dfrac{u_n}{2}$.
   On obtient alors ,en ajoutant les 2 inégalités :

$$u_{n+1} = e^{u_n} - \mathrm{e} * \ln(u_n) \geqslant 3 * u_n - \mathrm{e} * \frac{u_n}{2} = \frac{6-\mathrm{e}}{2} * u_n.$$

   (c) Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n > 0$, on a aussi :

$$0 < \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{2}{6-\mathrm{e}}.\frac{1}{u_n}.$$

   On pourrait alors démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n . \dfrac{1}{u_0}$