EB N° 1

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Matrices « carrés magiques)

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante : une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note $s(A)$ la valeur **commune** de ces six sommes.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et

J la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs $s(I)$ et $s(J)$.
2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
   Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathcal{E}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.
   (a) Calculer AJ et JA.
   (b) Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $AJ = JA$.
   (c) Vérifier que si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)J$.
4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.
   (a) A l'aide de la caractérisation du 3.b, montrer que le produit AB appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) A l'aide de la question 3.c, établir l'égalité : $s(AB) = s(A)s(B)$.
5. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.
   (a) À l'aide de la question 3.b, montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $s(A)$.
6. (*) Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.
   On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.
   (a) Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que : $BC = CB = 0_3$, la matrice nulle, en se servant de l'égalité $J^2 = 3J$.
   (c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 1, que : $(A - B)^n = A^n - B^n$.
   (d) La matrice C appartient-elle à $\mathcal{F}$?
   (e) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathcal{F}$

Exercice 2

Partie I : calcul matriciel

On considère dans cette partie les matrices M et P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On notera par ailleurs I la matrice identité d'ordre 3 .

1. Vérifier que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/12 & -1/6 & 1/12 \\ -1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, que l'on notera désormais D.
3. Prouver que, $\forall n \geqslant 1, M^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de la matrice M^n.

Partie II : un problème de probabilités.

Un préparationnaire interrompt chaque soir ses révisions de mathématiques pour dîner, et dispose pour cela de trois options : se faire des pâtes, aller prendre un hamburger au fast-food en bas de chez lui, ou réchauffer au micro-ondes un plat préparé. On observe pendant un certain temps les dîners du préparationnaire, et on constate les phénomènes suivants :

- au jour numéroté 0 où l'on débute l'observation, le préparationnaire a mangé un hamburger.

- s'il mange des pâtes au jour n, le préparationnaire mangera à nouveau des pâtes le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$, descendra manger un hamburger sinon (mais ne mangera jamais de plat préparé).

- s'il mange un hamburger au jour n, il aura 3 chances sur 4 de manger des pâtes le lendemain, et une chance sur 4 de se faire un plat préparé.

- s'il mange un plat préparé au jour n, il mangera un hamburger ou à nouveau un plat préparé le lendemain, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque.

On note dans tout le problème et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les évènements suivants :

- A_n : «Le préparationnaire mange des pâtes au jour n ».

- B_n : «Le préparationnaire mange un hamburger au jour nˇ.

- C_n : «Le préparationnaire mange un plat préparé au jour nˇ.

On note par ailleurs $a_n = P(A_n)\,; b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les probabilités a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Quelle relation aura-t-on en général entre a_n, b_n et c_n ?
3. On suppose, pour cette question uniquement, que notre préparationnaire mange à nouveau un hamburger au jour numéro 2. Quelle est alors la probabilité qu'il ait mangé un plat de pâtes au jour 1 ?
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

5. En déduire une matrice A telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.
6. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^nU_0$.
7. Exprimer A en fonction de la matrice M étudiée dans la première partie du problème, et en déduire les valeurs des probabilités a_n, b_n et c_n.
8. Déterminer les limites de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$.

-

Exercice 3

On réalise une suite de lancers d'une pièce truquée, chaque lancer amenant pile avec une probabilité 1/3.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient pile (resp. face) au $k^{éme}$ lancer".
Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
Pour $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement : "on obtient pour la premiére fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $n-1$ et n.

1. Calculer $P(A_2)$.
2. (a) En remarquant que $A_3 = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(A_3)$.
   (b) Sur le modéle de la question précédente, écrire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'événement A_n comme réunion de $(n-1)$ événements incompatibles.
   (c) Déterminer $\mathrm{P}(A_n)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2) c : par une autre méthode.
   (a) Montrer que, n désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \ldots P_{n-1}F_n$ se réalise pour que A_n se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales que :
   $$\forall n \geqslant 3 \qquad P(A_n) = \frac{2}{3}P(A_{n-1}) + \frac{2}{3^n}$$
   (c) On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n = \dfrac{3^n}{2}P(A_n)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est arithmético-géométrique. Plus précisément pour tout entier $n \geqslant 3,\ u_n = 2u_{n-1} + 1$.
   Retrouver le résultat annoncé.

Exercice 4

Partie I : Préliminaires

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{2x+1}$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{2x+1} > 1$ puis que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \dfrac{1}{2x+1} > \mathrm{e}^{-x-1}$.
   Donnée numérique : $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4,48$.

Partie II : Étude d'une suite implicite

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation : $f_n(x) = \dfrac{x-n}{x+1} - e^{-x}$.

1. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ (on précisera la limite de f_n en $+\infty$.)
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive notée u_n. On définit ainsi implicitement une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. On cherche dans les questions suivantes à étudier cette suite.
3. Monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. :
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant 0$.
   (b) En déduire que $f_n(u_{n+1})$ est positif.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
4. Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. :
   (a) En étudiant le signe de $f_n(n)$, montrer que $u_n \geqslant n$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) Déterminer le signe de $f_n(n+1)$.
   (d) En déduire un encadrement de u_n puis la limite de $\dfrac{u_n}{n}$.