EB N°1

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 3 (EML 1998)

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

N_V est le rang du premier V dans une suite de tirages indépendants avec $\mathrm{P}(V) = p$ (équiprobabilité des boules) à chaque tirage.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ et de même } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$

1. (a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X = k)$ signifie que l'on a k verte puis une blanche ou inversement.
   Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \mathrm{P}((N_V = k+1) \cup (N_B = k+1)) \\
&= \mathrm{P}(N_V = k+1) + \mathrm{P}(N_B = k+1) \\
&= (1-p)^k p + p^k (1-p)
\end{aligned}$$

   (b) X a une espérance si la série suivante est absoulment convergente, ce qui équivaut à la convergence simple car les termes sont tous positifs.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} k\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{M} k\left[(1-p)^k p + p^k (1-p)\right] \\
&= p\sum_{k=1}^{M} k(1-p)^k + (1-p)\sum_{k=1}^{M} kp^k \\
&= p\sum_{k=0}^{M} k(1-p)^k + (1-p)\sum_{k=0}^{M} kp^k \\
&\to p\frac{1-p}{(1-1+p)^2} = (1-p)\frac{p}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

   car $|p| < 1$ et $|1-p| < 1$.

   Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et que } E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}\ .}$

   (c) On étudie les variations de $E(X)$ fonction de p :
   $f(p) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.
   f est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\begin{aligned}
f'(p) &= \frac{1-p+p}{(1-p)^2} + \frac{-p-1+p}{p^2} \\
&= \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}
\end{aligned}$$

Donc

p	0		$\frac{1}{2}$		1	
$2p-1$		$-$	0	$+$		affine
$f'(p)$		$-$		$+$		
$f(p)$		$\searrow$		$\nearrow$		

avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

Conclusion : $\boxed{E(X) \text{ est minimale lorsque } p = \frac{1}{2}, \text{ et vaut alors } 2}$

C'est quand on a les mêmes proportion de vertes et de blanches que l'on a en moyenne, les listes monocolore le splus courtes.

2. Pour tout $(i,\, j)$ de $(\mathbb{N}_n^*)^2$:

$$\begin{aligned}(X = i \text{ et } Y = j) &= (B_1 \cap \cdots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap \cdots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \\ &\quad \cup (V_1 \cap \cdots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1})\end{aligned}$$

les deux () étant incompatibles, et les tirages indépendants, on a

$$\mathrm{P}\left(X = i \text{ et } Y = j\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

3. (a) La loi de Y est la seconde loi marginale :
$Y\left(\Omega\right) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Y = j\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X = i \text{ et } Y = j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\left[p^{i+1}\left(1-p\right)^j + \left(1-p\right)^{i+1} p^j\right] \\ \sum_{i=1}^{M} \text{''} &= \left(1-p\right)^j p \sum_{i=1}^{M} p^i + p^j\left(1-p\right)\sum_{i=1}^{M}(1-p)^i \\ &\to \left(1-p\right)^j p\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) + p^j\left(1-p\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right) \quad \text{donc} \\ \mathrm{P}\left(Y = j\right) &= \left(1-p\right)^{j-1} p^2 + p^{j-1}\left(1-p\right)^2\end{aligned}$$

(b) La convergence absolue de la série $\sum_{j \geq 1} j\mathrm{P}\left(Y = j\right)$ équivaut à sa convergence simple.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M} j\mathrm{P}\left(Y = j\right) &= \sum_{j=1}^{M} j\left(1-p\right)^{j-1} p^2 + \sum_{j=1}^{M} jp^{j-1}\left(1-p\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{1-p}\sum_{j=1}^{M} j\left(1-p\right)^j + \frac{\left(1-p\right)^2}{p}\sum_{j=1}^{M} jp^j \\ &\to \frac{p^2}{1-p}\frac{1-p}{p^2} + \frac{\left(1-p\right)^2}{p}\frac{p}{\left(1-p\right)^2} = 2\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E\left(Y\right) = 2}$

4. (a) Si $p \neq \frac{1}{2}$,
et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X = 1 \cap Y = 1\right) &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p \\ &= \left(1-p\right)\left(p^2 + \left(1-p\right)p\right) \\ &= p\left(1-p\right) \\ \mathrm{P}\left(X = 1\right)\mathrm{P}\left(Y = 1\right) &= \left[\left(1-p\right)p + p\left(1-p\right)\right]\left[p^2 + \left(1-p\right)^2\right] \\ &= 2\left(1-p\right)p\left[2p^2 - 2p + 1\right] \\ (1) - (2) &= \left(1-p\right)p\left[1 - 2\left(2p^2 - 2p + 1\right)\right] \\ &= \left(1-p\right)p\left[-4p^2 + 4p - 1\right] \\ &= -\left(1-p\right)p\left[2p - 1\right]^2\end{aligned}$$

et comme $p \neq 1/2$ $\mathrm{P}\left(X = 1 \cap Y = 1\right) \neq \mathrm{P}\left(X = 1\right)\mathrm{P}\left(Y = 1\right)$

Conclusion : $\boxed{\text{si } p \neq \frac{1}{2} \text{ alors } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

(b) Si $p = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = i) &= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
\mathrm{P}(Y = j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
\mathrm{P}(X = i \text{ et } Y = j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = j)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } p = \frac{1}{2} \text{ les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

Exercice 4 (ECRICOM 2005)

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement :"deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n + 1$".

On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

- ⋆ Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = p(A_n)$
- ⋆ avec la convention $a_0 = 0$

1 Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - q\,x - p\,q$$

1. $f(x) = 0$ est une équation du second drégré qui a pour discriminant : $\Delta = q^2 + 4pq > 0$
   Donc elle a deux racines distinctes : $r_1 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$ (pour que $r_1 < r_2$)
   - ⋆ $r_1 + r_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2} + \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = q$
   - ⋆ $r_1 \times r_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{q^2-\sqrt{\Delta}^2}{4} = \frac{q^2-\Delta}{4} = \frac{q^2-q^2-4pq}{4} = -p\,q$
2. A voire la suite (valeurs intermédiaires) , on détermine les signes :
   - ⋆ $f(1) = 1 - q - p\,q = p - p\,q = p(1 - q) = p^2 > 0$
   - ⋆ $f(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1 - p) = 1 + q^2 > 0$
   - ⋆ $f(0) = -p\,q < 0$
3. Comme f est continue et que $0 \in]f(0), f(-1)[$ alors il existe $x \in]-1, 0[$ tel que $f(x) = 0$ et de même il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f(x) = 0$.
   Comme $f(x) = 0$ n'a pour racines que r_1 et r_2 alors $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$

   Variante : le tableau de variation de f est :

x		r_1				r_2	
$f(x)$	$+ \searrow$	0	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow +$

   comme $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ et $f(-1) > 0$ on a par exclusion : $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$
   Donc $|r_2| < 1$ et $|r_1| < 1$
   Enfin, comme $r_2 > 0$ et $r_1 < 0$: $|r_2| = r_2$ et $|r_1| = -r_1$
   Et comme $q > 0$: $-r_1 = \frac{\sqrt{\Delta}-q}{2} < \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2} = r_2$
   Conclusion : $\boxed{|r_1| < |r_2| < 1}$

2 Equivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. On décompose les événements pour calculer leurs proabbiltiés en notant P_1P_2 pour $P_1 \cap P_2$

   ⋆ On a $a_1 = p(A_1) = p(P_1P_2) = p(P_1)\,p(P_2)$ car les lancers sont indépendants. Donc $a_1 = p^2$

   ⋆ A_2 ="premier PP au 2° lancer" on a alors $P_2 \cap P_3$ et on ne peut pas avoir P_1 (sinon on a A_1 et pas A_2)
   Donc $A_2 = F_1P_2P_3$ et $a_2 = p(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = q\,p^2$

   ⋆ Si A_3 alors P_3P_4. Si on a P_1 il faut alors F_2 sinon on a A_1. Si on a F_1 alors il faut F_2 sinon on a A_2
   Donc $A_3 = (P_1F_2P_3P_4) \cup (F_1F_2P_3P_4)$ incompatibles et
   $a_3 = p(P_1F_2P_3P_4) + p(F_1F_2P_3P_4) = pqp^2 + q^2p^2 = qp^3(p+q) = qp^3$

2. Pour la réalisation de A_{n+2} :

   ⋆ ou bien on a P_1 auquel cas il ne faut pas avoir P_2 sinon on a A_1.
   Donc on a alors F_2 et il faut le premier PP n lancers pus tard (i.e. A_n est réalisé)

   ou

   ⋆ on a F_1 et le premier PP doit intervenir $n+1$ lancers plus tard (i.e.A_{n+1} est réalisé.)

   Donc $p(A_{n+2}) = p(P_1F_2)\,p(A_n) + p(F_1)\,p(A_{n+1})$
   car premier PP n lancers pus tard est indépendant de P_1F_2 et e premier PP doit intervenir $n+1$ lancers plus tard est indépendant de F_1
   D'où $a_{n+2} = q\,a_{n+1} + p\,q\,a_n$ et $a_{n+2} - q\,a_{n+1} - p\,q\,a_n = 0$ qui est encore vraie pour $n = 0$ $(a_2 - qa_1 - p\,q\,0 = 0)$

3. Voir TP (suite récurrente linéaire d'ordre 2)

4. La suite a est récurente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équation caractéritique est : $x^2 - q\,x + pq = 0$ qui a pour racines r_1 et r_2
   Donc pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \alpha\, r_1^n + \beta\, r_2^n$ avec α et β déterminés par a_0 et a_1

   ⋆ pour $n = 0$: $\frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^0 - r_1^0\right] = 0 = a_0$

   ⋆ et pour $n = 1$: $\frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^1 - r_1^1\right] = p^2 = a_1$

   ⋆ Donc les solutions sont $\alpha = -\frac{p^2}{r_2 - r_1}$ et $\beta = \frac{p^2}{r_2 - r_1}$

   Variante : on résoud directement $\left\{\begin{array}{c} a_0 = 0 = \alpha + \beta \\ a_1 = p^2 = \alpha\, r_1 + \beta\, r_2 \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{c} \beta = -\alpha \\ p^2 = \alpha\,(r_1 - r_2) \end{array}\right.$
   et $\alpha = \frac{-p^2}{r_2 - r_1}$ et $\beta = \frac{p^2}{r_2 - r_1}$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1 : a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right] \text{ et également pour } n = 0}$

5. On a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[r_2^n - r_1^n\right] \\ &= \frac{p^2 r_2^n}{r_2 - r_1}\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

   et comme $\left|\frac{r_1}{r_2}\right| < 1$ alors $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \to 0$ d'où $\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right] \to 1$ et
   Conclusion : $\boxed{(a_n) \text{ est équivalente à } (b_n) \text{ lorsque } n \text{ tend vers plus l'infini où } b_n = \dfrac{p^2 r_2^n}{r_2 - r_1}}$

3 Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n : \quad X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

1. On a pour tout entier n :$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\,a_{n+1} + p\,q\,a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p\,q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$
et comme $r_1 + r_2 = q$ et $-r_1 r_2 = p\,q$ on a bien alors
$$X_{n+1} = A\,X_n$$
2. $A - r_1 I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$ et comme la seconde colonne est $-r_1$ la première, elles sont liées et la matrice est non inversible.
$A - r_2 I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1 r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$ et comme la seconde colonne est $-r_2$ la première, elles sont liées et la matrice est non inversible.
3. Donc r_1 et r_2 sont valeurs propres de A.
Comme elles sont distinctes et que A est de taille 2 alors A est diagonalisable.
4. Au vu de la suite, on se doute que P est la matrice de passage et on test donc ses colonnes comme colonnes propres :
$\begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^2 \\ r_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc elle est colonne propre associée à r_1
$\begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2^2 \\ r_2 \end{pmatrix} = r_2 \begin{pmatrix} r_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc elle est colonne propre associée à r_2
Donc la concaténation de ces 2 colonnes propres associées à des valeurs propres distinctes fomre une matrice inversible
et $A = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$
On calcule P^{-1}, par Gauss :
$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - r_1 L_1 \end{matrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_2 - r_1 & 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2/\,(r_2 - r_1) \\ L_2/\,(r_2 - r_1) \end{matrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{r_2}{r_2 - r_1} \\ 0 & 1 & \frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{-r_1}{r_2 - r_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2/\,(r_2 - r_1) \\ L_2/\,(r_2 - r_1) \end{matrix}$$
donc $P^{-1} = \dfrac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$
5. On a vu que $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$
6. Par récurrence :
   - ⋆ pour $n = 0$: $P\,D^0 P^{-1} X_0 = I\,X_0 = X_0$
   - ⋆ Soit $n \geq 0$ tel que $X_n = P\,D^n P^{-1} X_0$
   alors $X_{n+1} = A\,X_n = P\,DP^{-1} P\,D^n P^{-1} X_0 = P\,D\,D^n P^{-1} X_0 = P\,D^{n+1} P^{-1} X_0$
   - ⋆ Donc pour tout entier n : $X_n = P\,D^n P^{-1} X_0$
7. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$ et
$$\begin{aligned} X_n &= PD^n \begin{pmatrix} -1 & r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p^2 \\ p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_1^n p^2 \\ r_2^n p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} (r_1 r_2^n - r_2 r_1^n)\,p^2 \\ (r_2^n - r_1^n)\,p^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
dont la seconde composante est $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1} [r_2^n - r_1^n]$ (qui est bien le résultat trouvé précédemment)

4 Etude du temps d'attente du premier double pile .

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile.

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$p\,[T=n+1]=a_n$$

1. On calcule la somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}p\,[T=n+1] &= \sum_{n=1}^{N}a_n\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{p^2}{r_2-r_1}\left[r_2^n-r_1^n\right]\\ &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\left[\sum_{n=1}^{N}r_2^n-\sum_{n=1}^{N}r_1^n\right]\\ &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\left[\sum_{n=0}^{N}r_2^n-1-\sum_{n=0}^{N}r_1^n+1\right]\\ &\to \frac{p^2}{r_2-r_1}\left[\frac{1}{1-r_2}-\frac{1}{1-r_1}\right]\end{aligned}$$

converge car $|r_1|<1$ et $|r_2|<1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty}p\,[T=n+1]$ converge et vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}p\,[T=n+1] &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\left[\frac{1}{1-r_2}-\frac{1}{1-r_1}\right]\\ &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\frac{r_2-r_1}{(1-r_2)(1-r_1)}\\ &= \frac{p^2}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2}\\ &= \frac{p^2}{1-q-p\,q}=\frac{p^2}{p-p\,q}\\ &= \frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc T est une variable aléatoire.

2. T a une espérance si $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\,p\,[T=n+1]$ est absolument convergente. (ce qui équivaut à la convergence simple puisque les valeurs de T sont toutes positives)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(n+1)\,p\,[T=n+1] &= \sum_{n=1}^{N}(n+1)\,a_n\\ &= \sum_{n=1}^{N}n\,a_n+\sum_{n=1}^{N}a_n\\ &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\sum_{n=1}^{N}n\left[r_2^n-r_1^n\right]+\sum_{n=1}^{N}a_n\\ &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\left[\sum_{n=0}^{N}n\,r_2^n-0-\sum_{n=0}^{N}n\,r_1^n+0\right]+\sum_{n=1}^{N}a_n\\ &\to \frac{p^2}{r_2-r_1}\left[\frac{r_2}{(1-r_2)^2}-\frac{r_1}{(1-r_1)^2}\right]+1\end{aligned}$$

Donc T a une espérance qui vaut

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2}{(1-r_2)^2} - \frac{r_1}{(1-r_1)^2}\right] + 1 \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{[(1-r_2)(1-r_1)]^2}\right] + 1 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (1-r_2)(1-r_1) &= 1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2 = 1 - q - pq \\ &= p - pq = p(1-q) = p^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2 &= r_2\left(1 - 2r_1 + r_1^2\right) - r_1\left(1 - 2r_2 + r_2^2\right) \\ &= r_2 - 2r_1r_2 + r_2r_1^2 - r_1 + 2r_1r_2 - r_1r_2^2 \\ &= r_2 + r_2r_1^2 - r_1 - r_1r_2^2 \\ &= r_2 - r_1 + r_1r_2(r_1 - r_2) \\ &= (r_2 - r_1)(1 - r_1r_2) \\ &= (r_2 - r_1)(1 + pq) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left[\frac{r_2(1-r_1)^2 - r_1(1-r_2)^2}{[(1-r_2)(1-r_1)]^2}\right] + 1 \\ &= \frac{p^2}{r_2 - r_1}\frac{(r_2 - r_1)(1 + p\,q)}{p^4} + 1 \\ &= \frac{1 + p\,q}{p^2} + 1 = \frac{1 + pq + p^2}{p^2} \\ &= \frac{1 + p(q+p)}{p^2} \\ &= \frac{1+p}{p^2} \end{aligned}$$