# EB n° 1

Durée : 4h

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Exercice 1.** 1. *Déterminer l'ensemble $D$ des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.*
*On définit la fonction $f$ par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right)$.*
*On note $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

2. (a) *Étudier les variations de $f$ et donner les limites de $f$ aux bornes de $D$.*
   (b) *En déduire l'existence d'un unique réel $\alpha$ vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de $\alpha$.*
   (c) *Montrer que le coefficient directeur de la tangente $(T)$ à la courbe $(C)$ au point d'abscisse $\alpha$ vaut $\sqrt{5}$.*
3. (a) *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.*
   (b) *En déduire l'équation de l'asymptote $(\Delta)$ à la courbe $(C)$ au voisinage de $+\infty$.*
   (c) *Donner la position relative de $(\Delta)$ et $(C)$.*
4. *Donner l'allure de la courbe $(C)$ en faisant figurer les droites $(\Delta)$ et $(T)$.*
   *On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{\alpha} \simeq 2,2$.*

**Exercice 2.** *On considère la fonction $f$ définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$*

1. *Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.*
   *On note $f^{-1}$ la bijection réciproque de $f$. Donner les tableaux des variations de $f$ et de $f^{-1}$*
2. *Vérifier qu'il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté $\alpha$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$.*
   *Montrer que $\alpha \neq 0$.*
   *On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :*

$$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$$

3. *Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ existe et $u_n \in [0;1]$*
   (a) *Montrer que pour tout réel $x$ de $[0;1]$ , $f(x) - x \geqslant 0$. Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.*
   (b) *En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
   (c) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle a pour limite $0$.*
4. *On pose pour tout entier naturel $n$ : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$*
   (a) *Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n\, e^{-u_{n+1}}$.*
   (b) *En déduire par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$*
   (c) *Montrer que $u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et en déduire que la série de terme général $u_n$ est convergente.*
   *On note $L$ sa somme. Montrer que $\alpha \leqslant L \leqslant 2$.*
   (d) *Montrer finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n u_n = e^{-L}$*

**Exercice 3.** *Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

**Partie I : Exemples**

1. *Premiers exemples*
   *Pour tout entier naturel $n$, calculer $w_n$ en fonction de $n$ dans chacun des cas suivants :*
   (a) *pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.*
   (b) *pour tout entier naturel $n$, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.*
   (c) *pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{3^n}{n!}\cdot$*
2. *Une propriété de l'opération * : Montrer que pour toutes suites $u$ et $v$, $u * v = v * u$.*
3. *Programmation*
   *Dans cette question, les suites $u$ et $v$ sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}\cdot$*
   *Écrire un programme en Scilab qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel $n$, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$.*

**Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites**

*Dans cette partie, $A$ désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. *Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de $A$ et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à $A$.*
2. *Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.*
   (a) *Montrer qu'il existe deux constantes réelles $\alpha$ et $\beta$ telles que l'on a :*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
   (b) *En déduire qu'il existe des suites appartenant à $A$ et non monotones.*
3. *Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $A$ et $b$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.*
   *On définit alors la suite $c$ par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.*
   (a) *Montrer que la suite $c$ est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre $\ell$ que l'on ne cherchera pas à calculer.*
   (b) *Pour tout entier naturel $n$, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.*
   *Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et $a$ ?*

**Exercice 4.** *Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :*

- ⋆ *s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.*
- ⋆ *s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.*
- ⋆ *s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.*
- ⋆ *s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.*

*Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $A_n$ l'événement : le joueur gagne la $n^{ième}$ partie.*
*De plus, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on pose :*

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. *On admet que $(E_n, F_n, G_n, H_n)$ est un système complet d'événements.*
   (a) *Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \dfrac{2}{3}P(E_n) + \dfrac{1}{2}P(F_n)$.*
   (b) *Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.*
   (c) *Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.*
   *Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.*
2. (a) *Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.*
   *Calculer $PQ$. En déduire que $P$ est inversible et donner son inverse.*
   (b) *Justifier que $M = PDP^{-1}$, où $D$ est une matrice diagonale que l'on déterminera.*

**Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.**

3. (a) *Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.*
   (b) *Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.*
   (c) *Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de $M^n$, puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.*
   (d) *Montrer que l'on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$