EB N$^{\text{o}}$ 1

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. (a) Montrer que pour tout $x > 0 : x - \ln(x) > 0$
   (b) On pose alors $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$
   Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.
2. (a) Montrer que f est continue sur D.
   (b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.
3. (a) Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Etudier le signe de $f(x)$.

Execice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1. (a) Montrer que$f$ est paire et étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$)
   (c) Montrer que pour tout réel x : $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in [0, \dfrac{1}{2}]$
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   (d) En utilisant 2) b), écrire un programme en Scilab permettant d'obtenir un entier naturel N à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 3

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie I : Etude d'une fontion

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2 e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Etablir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie II : Etude d'une suite

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Etude d'une série

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.
7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(n)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(e-1)e^n}$.
8. En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 4

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k,$$

1. On définit une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes par :
   pour tout réel x,
   $$R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2$$
   et pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
   $$R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$$
   (a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4.
   (b) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité :
   $$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$$
   (c) Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \dfrac{1}{x} = a$.

2. Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.
On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par :

$$\widetilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x).$$

   (a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.

   (b) Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$.
   Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.
   Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

   (c) On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par :

$$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1.$$

   Déterminer les racines de Q.