EB N° 1 (CORRECTION)

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. (a) On étudie les variations de $g(x) = x - \ln(x)$
   g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		
$x-1$		$-$	0	$+$	affine
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+\searrow$	1	$\nearrow +$	

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x > 0 : g(x) > 0}$

   (b) f est définie en 0 et en x tel que $x > 0$ et $x - \ln(x) \neq 0$.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est définie sur } [0,+\infty[}$

2. (a) f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.
   En 0 : pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(x)(-1 + x/\ln(x))} \\ &= \frac{1}{-1 + x/\ln(x)} \to -1 = f(0) \end{aligned}$$

   Donc f est continue en 0.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

   (b) Pour $x > 0$, le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} + 1}{x} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(x) + x}{x(x - \ln(x))} \\ &= \frac{1}{x - \ln(x)} \to 0 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } 0^+ \text{ et } f'_d(0) = 0}$

3. (a) Sur $]0,+\infty[$ on a $x-\ln(x)\neq 0$ donc f y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-\ln(x))\frac{1}{x}-\ln(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln(x))^2} \\ &= \frac{x-\ln(x)-\ln(x)(x-1)}{x(x-\ln(x))^2} \\ &= \frac{x-x\ln(x)}{x(x-\ln(x))^2} \\ &= \frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2} \end{aligned}$$

(b) En $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)}{x(1-\ln(x)/x)} \\ &\to 0 \text{ car } \ln(x)=o(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(x)\to 0 \text{ quand } x\to+\infty}$

(c) On a alors :

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$		$+\searrow$	0	$\searrow -$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4. Comme $x-\ln(x)>0$ le signe de $f(x)$ est celui de $\ln(x)$ (et négatif en 0)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	

Execice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. (a) On a pour tout réel x :si $x\in D_f$, $-x\in D_f$ et

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}}+1}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}=f(x)$$

Donc f est paire

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et m

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x\left(e^{2x}+1\right)-e^xe^{2x}2}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{e^x-e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^{2x}+1)}\left(1-e^{2x}\right) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$1-e^{2x}$		$+\searrow$	0	$\searrow -$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Pour la limite en $-\infty$: $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}\to 0$ (pas de forme indéterminée) et en$+\infty$ on a épar symétrie $f(x)\to 0$

(b) On étudie les variations de la différence :$g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \frac{e^x - e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} - 1$$

on ne sait pas factoriser simplement...
Mais sur $\mathbb{R}^-$, on a $f(x) > 0$ donc $f(x) > x$ et $f(x) = x$ n'y a pas de solution.
Sur $\mathbb{R}^+$: $f'(x) \leq 0$ donc $g'(x) < 0$
On a donc g qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $]\lim_{+\infty} g, g(0)] =]-\infty, 1/2]$
Comme $0 \in]-\infty, 1/2]$ alors l'équation $g(x) = 0$ aune unique solution ℓ sur $\mathbb{R}^+$
De plus $g(1/2) = f(1/2) - 1/2 < 0$ donc $g(0) = 1/2 \geq g(\ell) \geq g(1/2)$ et comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'ils en sont éléments, $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Donc l'équation $f(\ell) = \ell$ a une unique solution ℓ et $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$

(c) Pour $x \leq 0$ on a $|f'(x)| = f'(x)$ et

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= \frac{e^x - e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{e^x - e^{3x} - e^x\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{-2e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Pour $x \leq 0$ on a $|f'(x)| = -f'(x)$ et

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= -\frac{e^x - e^{3x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{-e^x + e^{3x} - e^x\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{-2e^{x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Et comme f est maximale en 0, on a bien pour tout réle x : $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant f(0) = \dfrac{1}{2}$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Par récurrence :

- ⋆ pour $n = 0$ on a $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- ⋆ Soit n tel que $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq u \leq 1/2$ donc $f(0) \geq f(u_n) \geq f(1/2) \geq 0$ donc $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- ⋆ Donc pour tout entier n : $u_n \in [0, \dfrac{1}{2}]$

(b) D'après l'inégalité des accroissements finis, comme u_n et $\ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ alors

$$|f(u_n) - f(\ell)| = |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$

On a alors par récurrence :

- ⋆ puis $\quad |u_0 - \ell| = \ell \leqslant \frac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{0+1}}$
- ⋆ Soit n tel que $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$ alors $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^{n+1}}$
- ⋆ Donc pour tout entier n : $\qquad |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$

(c) Alors comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ on a $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et par encadrement ($0 \leq |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$) $|u_n - \ell| \to 0$ et donc la suite (u_n) converge vers ℓ.

(d) Voici le programme :

```
a=1/2
n=0
while a > 10^ (-3) do
a=(1/2)*a
n=n+1
end
disp(n)
```

Exercice 3

Partie I : étude d'une fonction $\varphi(x) = x^2e^x - 1$:

1. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et* $\varphi'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$:

D'où :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	0	+	
$\varphi(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\underline{\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -1}$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ d'après le théorème des croissances comparées.

2. Sur $]0,+\infty[$,$e^x = \frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow x^2.e^x = 1 \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0$.
Or sur $]0,+\infty[$, la continuité et la croissance stricte φ montrent que $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution que l'énoncé note α.
De plus $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.e^{0.5} - 1 = \frac{\sqrt{e}}{4} - 1 < 0$ (car $\sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$) et $\varphi(1) = e^1 - 1 > 0$,donc $\boxed{\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[.}$

Partie II : étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^3e^x$ et $u_0 = 1$:

3. Par une récurrence immédiate : $\underline{u_0 = 1 \geqslant 1}$ et si $u_n \geqslant 1$ alors $u_{n+1} = u_n^3e^{u_n} \geqslant 1.e^1 \geqslant 1$.

4. Pour $n\epsilon\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^3e^{u_n} - u_n = u_n(u_n^2e^{u_n} - 1) = u_n.\varphi(u_n) > 0$ car $\varphi > 0$ sur $]1,+\infty[$.
$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc croissante}}$.

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante est supérieure à 1 donc soit elle est convergente vers une limite $l \geqslant 1$, soit elle tend vers $+\infty$.
Si elle convergeait vers une limite $\ell \geq 1$, comme $\underline{u_{n+1} = f(u_n)}$ et que f est continue sur $]1,+\infty[$,on aurait $l = f(l)$.
Mais $\ell \geq 1$ donc $l = f(l) \Longleftrightarrow l = l^3e^l \Longleftrightarrow 1 = l^2e^l \Longleftrightarrow \varphi(l) = 0$, qui n'a pas de solution dans $]1,+\infty[$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est donc pas convergente et on a $\underline{\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty}$.

Partie III : étude d'une série

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \frac{1}{n^3e^n} < \frac{1}{n^3}$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est convergente ,donc par le théorème de majoration des séries à termes positifs ,$\underline{\text{la série } \sum \dfrac{1}{n^3e^n} \text{ est elle aussi convergente}}$.

7. On a

$$\left|S-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right|=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{f(k)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}\right|=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{f(k)}$$

(c'est le reste à l'ordre n d'une série convergente).
Or pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $0<\frac{1}{n^3e^n}<\frac{1}{e^n}$, et puisqu'on a ici des séries convergentes:

$$0\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^3e^n}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e^{n+1}}.\frac{1}{1-1/e}=\frac{1}{e^n}.\frac{1}{e-1}$$

8. Avec SciNotes S=0
   n=1
   while (1/((%e-1)*exp(n))) >0.0001
   S=S+1/(n^3*exp(n))
   n=n+1 end
   disp(S)

Exercice 4

1.

   (a) $R_3(x)=xR_2(x)-R_1(x)=x(x^2-2)-x=x^3-3x$
   $R_4(x)=xR_3(x)-R_2(x)=x(x^3-3x)-(x^2-2)=x^4-4x^2+2$.

   (b) On procède par récurrence double.
   On pose $(\mathcal{P}_k)$: le polynôme R_k est de degré k et $R_k(x+\dfrac{1}{x})=x^k+\dfrac{1}{x^k}$.
   Initialisation : Si $k=1$. R_1 est un polynôme de degré 1 et $R_1(x+\dfrac{1}{x})=x+\dfrac{1}{x}$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
   Si $k=2$. R_2 est un polynôme de degré 2 et $R_2(x+\dfrac{1}{x})=(x+\dfrac{1}{x})^2-2=(x^2+\dfrac{1}{x^2})$ donc $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_k)$ et $(\mathcal{P}_{k+1})$ sont vraies. En particulier, R_k est un polynôme de degré k avec $R_k(x+\dfrac{1}{x})=x^k+\dfrac{1}{x^k}$ et R_{k+1} est un polynôme de degré $k+1$ avec $R_{k+1}(x+\dfrac{1}{x})=x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}$.
   Le polynôme $x\mapsto xR_{k+1}(x)$ étant de degré $k+2$ et le polynôme R_k étant de degré k, donc le polynôme $x\mapsto xR_{k+1}(x)-R_k(x)=R_{k+2}(x)$ est de degré $k+2$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}R_{k+2}(x+\frac{1}{x}) &= (x+\frac{1}{x})R_{k+1}(x+\frac{1}{x})-R_k(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}})-(x^k+\frac{1}{x^k})\\ &= x^{k+2}+\frac{1}{x^k}+x^k+\frac{1}{x^{k+2}}-x^k-\frac{1}{x^k}=x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}.\end{aligned}$$

   Donc $(\mathcal{P}_{k+2})$ est vraie.
   Conclusion : $\forall k\geqslant 1$, $(\mathcal{P}_k)$ est vraie, c'est-à-dire, R_k est un polynôme de degré k avec $R_k(x+\dfrac{1}{x})=x^k+\dfrac{1}{x^k}$.

   (c) $x+\dfrac{1}{x}=a\Leftrightarrow\dfrac{x^2+1}{x}=a\Leftrightarrow x^2+1=ax\Leftrightarrow x^2-ax+1=0$. Le discriminant de ce trinôme est a^2-4.

   - ⋆ Si $a^2-4<0\Leftrightarrow a\in]-2,2[$ alors l'équation n'a aucune solution,
   - ⋆ Si $a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm 2$ alors l'équation a comme unique solution $x=1$,
   - ⋆ Si $a^2-4>0\Leftrightarrow a\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, alors l'équation a deux racines $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ et $x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$.

2.

(a) De façon évidente $Q(0) = a_0$ et puisque $a_0 = a_{2n} \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de Q.

(b) Nous avons l'égalité

$$\frac{Q(x)}{x^n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k \frac{x^k}{x^n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^{k-n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + a_n x^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^{k-n}.$$

Puisque $k - n < 0$ lorsque $k \in [\![0, n-1]\!]$ et, en utilisant le changement de variable $k = 2n - j \Leftrightarrow j = 2n - k \Leftrightarrow k - n = n - j$ dans la seconde somme, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{Q(x)}{x^n} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^{n-k}} + a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n-j} x^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^{n-k}} + a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{n-j} = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (\frac{1}{x^{n-k}} + x^{n-k}) \\ &= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k R_{n-k}(x + \frac{1}{x}) = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k R_{n-k}(y) \underset{j=n-k}{=} a_n + \sum_{j=1}^{n} a_{n-j} R_j(y) = \widetilde{Q}(y).\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{Q(x)}{x^n} \neq 0$ si et seulement si $\widetilde{Q}(y) \neq 0$.

Puisque 0 n'est pas racine de Q, l'équation $Q(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\dfrac{Q(x)}{x^n} = 0$ qui est identique à l'équation $\widetilde{Q}(y) = 0$. On a ainsi ramené une équation de degré $2n$ à une équation de degré n dont la résolution est à priori plus simple. Si $\{y_1, .., y_s\}$ sont les racines de cette équation, il ne restera plus qu'à résoudre les très simples équations $x + \dfrac{1}{x} = y_j$ pour trouver toutes les racines réelles de Q.

(c) Le polynôme $Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$ est de degré $6 = 2 \times 3$ et ses coefficients vérifient bien les symétries $a_k = a_{6-k}$. Puisque $a_3 = 2$, $a_2 = -9$, $a_1 = 1$, $a_0 = 1$, si l'on pose $y = x + \dfrac{1}{x}$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}(y) &= 2 + a_{3-1}R_1(y) + a_{2-1}R_2(y) + a_{3-3}R_3(y) = 2 + a_2R_1(y) + a_1R_2(y) + a_0R_3(y) \\ &= 2 - 9R_1(y) + R_2(y) + R_3(y) = 2 - 9y + y^2 - 2 + y^3 - 3y = y^3 + y^2 - 12y = y(y^2 + y - 12)\end{aligned}$$

Le trinôme $y^2 + y - 12$ admet comme discriminant $49 = 7^2$ donc ses racines sont -4 et 3. L'équation $\widetilde{Q}(y) = 0$ a pour solution $y = 0$ ou $y = 3$ ou $y = -4$. Puisque $y = x + \dfrac{1}{x}$, la question 1c montre que l'équation $x + \dfrac{1}{x} = 0$ n'a aucune solution, l'équation $x + \dfrac{1}{x} = 3$ admet comme solution $x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $x = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et l'équation $x + \dfrac{1}{x} = -4$ admet comme solution $\dfrac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3}$ et $x = \dfrac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3}$. Par conséquent, l'ensemble des racines de Q est l'ensemble

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3} \right\}.$$