EB N$^{\text{O}}$ 1

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. *1.* $e^x - e^{-x} > 0 \Longleftrightarrow e^x\left(e^{2x}-1\right) > 0$ *et comme* $x \to e^{2x}-1$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *et nulle en0 :* $e^x - e^{-x} > 0 \Longleftrightarrow x > 0$

Donc $D = \mathbb{R}_+^*$

On définit la fonction f *par :* $\forall x \in D,\ f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right)$.

On note (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. *(a)* f *est dérivable sur*

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x} > 0 \text{ sur } D} > 0$$

En $0 : \ln\left(e^x - e^{-x}\right) \to -\infty$ *et en* $+\infty : \ln\left(e^x - e^{-x}\right) \to +\infty$

Avec f *strictement croissante sur* D

(b) *Comme* f *est continue et strictement croisante sur l'ntervalle* $D =]0, +\infty[$ *elle est bijective de* D *dans* $]\lim_0 f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$.

Et comme $0 \in \mathbb{R}$ *l'éqution* $f(\alpha) = 0$ *a une unique solution.*

On résout :

$$\begin{aligned} \ln\left(e^x - e^{-x}\right) = 0 &\Longleftrightarrow e^x - e^{-x} = 1 \Longleftrightarrow e^{2x} - 1 = e^x \\ &\Longleftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Soit $X = e^x$.

L'éqution $X^2 - X - 1 = 0$ *du second degré a pour discriminant : 5 et pour racines :* $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ *et* $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

Donc l'unique solution est $\alpha = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

(c) *La pente vaut :* $f'(\alpha) = \dfrac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}}$ *et comme* $e^\alpha - e^{-\alpha} = 1$ *il reste :*

$$e^\alpha + e^{-\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}+4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{-4\sqrt{5}}{-4} = \sqrt{5}$$

donc le coefficient directeur de la tangente (T) *à la courbe* (C) *au point d'abscisse* α *vaut* $\sqrt{5}$.

3. *(a)* *On factorise dans le* $\ln : f(x) - x = \ln\left(e^x\left(1 - e^{-2x}\right)\right) - x = x + \ln\left(1 - e^{-2x}\right) - x \to 0$

(b) *On a donc une asymptote d'équation* $y = x$ *en* $+\infty$

(c) *et comme* $f(x) - x = \ln\left(1 - e^{-2x}\right) < 0$ *car* $1 - e^{-2x} < 1$ *alors la courbe de* f *est en dessous de l'asymptote*

4. *Donner l'allure de la courbe* (C) *en faisant figurer les droites* (Δ) *et* (T).

Il faut faire figurer sur la courbe

- ⋆ *le point d'abscisse* α *(ordonnée nulle) avec sa tangente*
- ⋆ *l'asymptote oblique en respecant les positions relatives,*
- ⋆ *l'asymptote verticale en 0*
- ⋆ *la concavité n'a pas été étudiée, mais on trace au plus simple : courbe concave. (en dessous de la tangente en* α *)*

Exercice 2. *On considère la fonction* f *définie sur* $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ *par* $f(x) = 2xe^x$

1. *f est dérivable sur $[0,1]$ et $f'(x) = 2(x+1)e^x > 0$.*
   f est donc continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc bijective de $[0,1]$ dans $f[0,1] = [f(0), f(1)] = [0, 2e]$

   On a donc

x	0	1
$f(x)$	0 $\nearrow$	2e

   et par symétrie,

x	0	2e
$f^{-1}(x)$	0 $\nearrow$	1

2. *Sur l'intervalle $[0,1]$ pour que f soit définie. : "$\alpha e^\alpha = 1$" $\Leftrightarrow$ "$f(\alpha) = 2$" et comme f est bijective de $[0,1]$ dans $[0,2e]$ et que $2 \in [0,2e]$, l'équation a une unique solution sur $[0,1]$. Et comme $f(0) = 0$, 0 n'est pas solution et $\alpha \neq 0$.*
   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

3. *Pour tout entier n, u_{n+1} existe si u_n existe et $u_n \in [0,2e]$: Il faut d'abord prouver que u_n existe avant de prouver que $u_n \in]0,1]$.*
   Pour $n = 0$, $u_0 = \alpha \in]0,1]$ car $\alpha \neq 0$
   Soit n un entier tel que u_n existe et $u_n \in]0,1]$.
   Alors $f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$ existe et $f^{-1}(u_n) \in]0,1]$ car pour tout x de $]0,2e]$: $f^{-1}(x) \in]0,1]$ donc $u_{n+1} \in]0,1]$
   Donc pour tout entier n, u_n existe et $u_n \in]0,1]$

   (a) *On étudie les variation de $g(x) = f(x) - x$.*
   g est dérivable sur $[0,1]$ et $g'(x) = 2(x+1)e^x - 1$
   g' est dérivable sur $[0,1]$ et $g"(x) = 2(x+2)e^x > 0$.
   Donc g' est strictement croissante et comme $g'(0) = 0$, $g'(x) > 0$ sur $[0,1]$
   Donc g est strictement croissante sur $[0,1]$ et comme $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ sur $]0,1]$ et $f(x) - x > 0$ avec $f(0) = 0$.

   (b) *Attention, ici $u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \Leftrightarrow u_n = f(u_{n+1})$*
   Comme pour tout entier n : $u_n \in]0,1]$ et $f(u_{n+1}) - u_{n+1} > 0$ donc $u_n - u_{n+1} > 0$ et $u_n > 0$
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

   (c) *u est décroissant eet minorée par 0. Elle est donc convergente. et comme pour tout entier n : $u_n \in [0,1]$, par passage à la limite, $\ell \in [0,1]$*
   Comme f^{-1} est continue sur $[0,2e]$ (réciproque d'une focntion continue et strictement croissante) elle est continue en ℓ.
   Donc $f(\ell) = \ell$. La seule solution sur $[0,1]$ étant 0 on a donc $\ell = 0$.
   Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

4. *On se propose de préciser ce résultat en déterminant un équivalent de u_n*
   On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

   (a) *On a pour tout entier n, $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ donc $u_n = f(u_{n+1}) = 2u_{n+1}e^{u_{n+1}}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n\, e^{-u_{n+1}}$*

   (b) *Pour $n = 0$, est-ce que $u_0 = \dfrac{e^{-S_0}}{2^0}$?*
   Or $S_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = \alpha$ et comme $\alpha e^\alpha = 1$, $\dfrac{e^{-S_0}}{2^0} = e^{-\alpha} = \alpha = u_0$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$, est-ce que $u_{n+1} = \dfrac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}}$?
   Or $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ et

$$\frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-S_n - u_{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-S_n}}{2^n}\frac{e^{-u_{n+1}}}{2} = u_n\frac{e^{-u_{n+1}}}{2} = u_{n+1}$$

   Donc pour tout entier n, $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$

(c) *Comme pour tout entier n : $u_n \geq 0$ on a alors $S_n \geq 0$ donc $-S_n \leq 0$ et comme la fonction exponnentielle est croissante sur $\mathbb{R}$: $e^{-S_n} \leq e^0$.*
Donc $u_n \leq \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente et par comparaison de séries à termes positifs la série de terme général u_n est convergente. On note L sa somme.
On a pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{N} u_n \geq u_0 = \alpha$ et
$\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{1-1/2} = 2$ donc par passage à la limite dans les inégalités $\alpha \leq L \leq 2$.

(d) *On calcule le quotient :*

$$\frac{u_n}{\frac{e^{-L}}{2^n}} = \frac{e^{-S_n}}{2^n}\frac{2^n}{e^{-L}} = e^{-S_n+L} \underset{n\to+\infty}{\to} e^0 = 1$$

d'où finalement $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-L}}{2^n}$

Exercice 3. *Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie I : Exemples

1. *Premiers exemples*
   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :
   (a) *On a alors $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2\cdot 3 = 6\,(n+1)$*
   (b) *$u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$. On a alors*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} (2/3)^k = 3^n\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

   (c) *$u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$. On a alors*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} C_n^k 2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!}\,(2+3)^n = \frac{1}{n!}5^n$$

2. *En changeant l'indice k par $n-k$, on obtient le résultat.*
3. *Programmation*
   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   On a $v_{n-k} = 1/\left(n-k+1\right)$

```
n=input('saisir n ')
w=0
for k=0:n
      w=w+log(k+1)/(n-k+1)
      disp(w)
end
```

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. *Si une suite a est décroissante alors pour tout entier $n > 0$: $a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$ donc $a_{n+1} \leq a_{n-1}$ et en additionnant ces deux inégalités on a $2a_{n+1} \leq a_n + a_{n-1}$ ou encore, $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$.*
   Donc toute suite décroissante de réels positifs est élément de A.
   Si une suite a est strictement croissante alors $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$ et $2a_{n+1} > a_n + a_{n-1}$ et on n'a donc pas $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ pour tout entier $n > 0$. Donc une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. *Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   (a) *Une telle suite est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.*
   Son équation caractéristique est : $2r^2 - r - 1 = 0$ *qui a pour racines* 1 *et* $-1/2$
   Donc il existe deux constantes réelles α *et* β *telles que l'on a :*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (b) *On utilise la réciproque de la propriété ci-dessus :*
   Soit la suite définie par $z_n = 1 + (-1/2)^n$ *. Elle est solution de* $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$ *et est positive* ($(-1/2)^n \geq -1$ *pour tout entier* n)
   Donc elle est élément de A*. Mais elle n'est pas monotone :*
   $z_0 = 2 > z_1 = 1/2 < z_2 = 3/4$
   Donc il existe des (au moins une) suites appartenant à A *et non monotones.*

3. *Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$*.(c'est la suite u' du 3.)*

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   (a) *Pour tout* $n \geq 1$ *on a :* $c_n - c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} - \left(a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n-1}\right) - a_{n+1} \geq 0$ *car* $a \in A$
   Donc $c_{n+1} \leq c_n$ *et la suite c est décroissante.*
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant 0$ *alors* $c_n \geqslant 0$ *et la suite c est décroissante et minorée par* 0 *donc convergente vers un réel* $\ell \geqslant 0$

   (b) *La démonstration de* $\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$ *ne se prête pas à la récurrence car n apparaît aussi à l'intérieur de la somme, et l'on n'a pas de relation simple entre* c_{n+1-k} *et* c_{n-k}
   On a deux expressions pour $c_{n-k} = a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}$ *si* $k \leq n-1$ *et* $c_{n-n} = a_0$
   Il faudra donc découper la somme. Et pour cela, que $n \geqslant 1$
   Pour $n = 0 : \sum_{k=0}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{0-k} = c_0 = a_0$
   Et pour tout entier naturel $n > 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}\right) + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2}a_{n-k-1} + a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} a_{n-k-1} + a_0 \quad \text{réindexé } h = k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{h=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^h a_{n-h} + a_0
\end{aligned}$$
$$= a_n - a_0 + a_0 = a_n$$

   On a donc $b * c = a$

Exercice 4. *Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{ième}$ partie. De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :*

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. *On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.*

(a) *Avec le SCE précédent, on a :*
$\mathrm{P}(E_{n+1}) = \mathrm{P}_{E_n}(E_{n+1})\mathrm{P}(E_n) + \mathrm{P}_{F_n}(E_{n+1})\mathrm{P}(F_n) + \mathrm{P}_{G_n}(E_{n+1})\mathrm{P}(G_n) + \mathrm{P}_{H_n}(E_{n+1})\mathrm{P}(H_n)$
Hors, quand G_n *est réalisé, on a* $\overline{A_n}$*, donc* $E_{n+1} = A_{n-1} \cap A_n$ *n epeut pas être réalisé, et* $\mathrm{P}_{G_n}(E_{n+1}) = 0$
De même $\mathrm{P}_{H_n}(E_{n+1}) = 0$
Si E_n *est réalisé, il a gagné en* $n-1$ *et* n *donc il gagnera la suivante avec une probabiltié de* $\dfrac{2}{3}$.
Comme $E_{n+1} = A_n \cap A_{n+1}$ *alors* $\mathrm{P}_{E_n}(E_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$
Si F_n *est réalisé, il a perdu en* $n-1$ *et gagné* n *donc il gagnera la suivante avec une probabiltié de* $\dfrac{1}{2}$ *alors* $\mathrm{P}_{F_n}(E_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$
Finalment, $\mathrm{P}(E_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\mathrm{P}(E_n) + \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(F_n)$ *pour* $n \geq 2$

(b) *De la même façon (N.B. ol'énnoncé donne le résultat juste en dessous ! il suffit de le recopier puisque "aucune explication n'est exigée"*

- ⋆ $\mathrm{P}(F_{n+1}) = \mathrm{P}\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(H_n)$
- ⋆ $\mathrm{P}(G_{n+1}) = \mathrm{P}\left(A_n \cap \overline{A_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(E_n) + \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(F_n)$
- ⋆ $\mathrm{P}(F_{n+1}) = \mathrm{P}\left(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \dfrac{2}{3}\mathrm{P}(H_n)$

(c) *On a* $U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(E_{n+1}) \\ \mathrm{P}(F_{n+1}) \\ \mathrm{P}(G_{n+1}) \\ \mathrm{P}(H_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n) \\ \frac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \frac{1}{3}\mathrm{P}(H_n) \\ \frac{1}{3}\mathrm{P}(E_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(F_n) \\ \frac{1}{2}\mathrm{P}(G_n) + \frac{2}{3}\mathrm{P}(H_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$
Donc $U_{n+1} = MU_n$

2. (a) *On a* $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$
Donc $P\frac{1}{10}Q = I$ *et* P *inversibled'inverse* $P^{-1} = \frac{1}{10}Q$

(b) $MC_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}C_1$

$MC_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}C_2$

$MC_3 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}C_3$

$MC_4 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = C_4$

Donc $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}$ *et* 1 *sont* 4 *valeurs propres de* M *distinctes. Comme elle ne peut pas en avoir plus, ce sont les seules.*

(c) *Et* M *étant de taille* 4*, elle est alors diagonailisable avec la matrice* P *obtenue en concaténant les quatre colonnes propres :*
avec $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a* $M = P\,D\,P^{-1}$

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) *Pour $n=0$, on a $M^0 = I = P\,I\,P^{-1} = PD^0P^{-1}$*
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = PD^nP^{-1}$ alors
   $M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = P\,D^{n+1}P^{-1}$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.

   (b) *Pour $n=2$, on a $M^{2-2}U_2 = I\,U_2 = U_2$*
   Soit $n \geq 2$ tel que rence, que $U_n = M^{n-2}U_2$ alors $U_{n+1} = M\,U_n = M\,M^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2$
   Donc $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.

   (c) ***N.B.** il est inutile de calculer le produit $M^n = PD^nP^{-1}$ entier. Il suffit d'en calculer la première colonne. Et pour celà de faire le produit par la première colonne de gauche à droite. M^n a pour première colonnne*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \\ 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ -2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \end{pmatrix}$$

   et commme $U_n = M^{n-2}U_2$ et que $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puique'il a gagné les deux premières parties, U_n est alors la première colonne de M^{n-2} d'où

   - $\star$ $\mathrm{P}(E_n) = \frac{1}{10}\left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$,
   - $\star$ $\mathrm{P}(F_n) =, \frac{1}{10}\left(2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$
   - $\star$ $\mathrm{P}(G_n) = \frac{1}{10}\left(-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 2\right)$ *et*
   - $\star$ $\mathrm{P}(H_n) = \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 3\right)$

   (d) *Et quand $n \to +\infty$, comme $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$ ont des valeurs absolues strictment inférieures à 1 alors $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. Et donc*

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. *Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).*

   (a) *Pour gagner la $k^{\text{ième}}$ partie, le joueur peut avoir gagné ou perdu la $k-1^{\text{ème}}$ donc $A_k = E_k \cup F_k$*

   (b) *Comme les deux sont incompatibles,*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_k = 1) &= \mathrm{P}(A_k) = \mathrm{P}(E_k) + \mathrm{P}(F_k) \\ &= \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right), \end{aligned}$$

   et donc X_k suit une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right)$

5. *Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.*

   (a) ***N.B.*** *Ici, les parties ne sont pas indépendantes, donc S_n ne suit pas une loi géométrique !*
   Comme le joueur a gagné ses deux premières parties
   Pour $n = 2$, on a $S_n = 2$ qui est l'événement certain donc $\mathrm{P}(S_2 = 2) = 1$
   Pour $n = 3$, comme le joueur a gagné les deux premières parties, $(S_3 = 2) = \overline{A_3}$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_3 = 2) &= 1 - \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 5\right) \\
&= 1 - \frac{1}{10}\left(\frac{-2+12+30}{6}\right) = 1 - \frac{40}{10\cdot 6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   et pour $n \geq 4$, $(S_n = 2)$ signifie qu'il n'a pas gangé d'autre partie que les deux première donc $(S_n = 2) = \bigcap_{k=3}^{n} \overline{A_k}$ donc (les parties ne sont pas indépendantes)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_n = 2) &= \mathrm{P}\left(\overline{A_3}\right)\mathrm{P}_{\overline{A_3}}\left(\overline{A_4}\right)\mathrm{P}_{\overline{A_3}\cap\overline{A_4}}\left(\overline{A_5}\right)\dots\mathrm{P}_{\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_{n-1}}}\left(\overline{A_n}\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

   car quand on perd les deux précédentes, la probabiltié de perdre la suivante est de $\frac{2}{3}$
   La probabilité est de 2/3 de la $5^{ième}$ à la $n^{ième}$ partie donc $k - 5 + 1 = n - 4$ fois. Et
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(S_n = 2) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4} \text{ pour } n \geq 4}$

   (b) *$(S_n = n)$ signifie que le joueur a gagné toutes ses parties donc $(S_n = n) = \bigcap_{k=3}^{n} A_k$ et*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_n = n) &= \mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}_{A_3}(A_4)\mathrm{P}_{A_3\cap A_4}(A_5)\dots\mathrm{P}_{A_2\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

   car le conditionnement précise qu'il a gagné à chaque fois les deux parties précédentes.
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(S_n = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}$.

   (c) *X_k compte le nomber de victoire pour la $k^{ième}$ partie, donc le nombre total de victoires est $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et*

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \sum_{k=3}^{n} E(X_k) \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{10}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 5\right) \\
&= 2 + \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n-2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k} + \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} + \frac{n-2}{2} \\
&= \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} + \frac{2}{5}\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{40}\left(9\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} - 1\right) - \frac{2}{5}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 1\right) \\
&= \frac{n}{2} + \frac{11}{8} + \frac{9}{40}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} - \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$