EB N° 2

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1-p$. On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise.

On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

pour tout $(i,\ j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i$ et $Y = j)$ est l'événement : « les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)$-ème est blanche ou les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)$-ème est verte ».

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$, on a $X = 3$ et $Y = 2$.

1. (a) Montrer que $P(X = i) = (1-p)^i p + p^i(1-p)$
   (b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$
   (c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.
2. Montrer, pour tout $(i,\ j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i$ et $Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$.
3. (a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.
4. Rappel : on dit deux variables aléatoires M et N sont indépendantes si pour tout $(i,\ j) \in M(\Omega) \times N(\Omega)$ les événements $(M = i)$ et $(N = j)$ sont indépendants.
   (a) Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
   (b) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

1. Étudier les variations de f et donner les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Déduire des variations de f l'existence d'un unique réel α, élément de l'intervalle $[-2, -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$. (on rappelle que $e \simeq 2,7$)

1) Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. Prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que que pour tous réels x et t :

$$f(x) + (t-x)f'(x) \leq f(t)$$

2. En déduire l'inégalité suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_{n+1}$$
Puis que pour tout entier naturel n. :
$$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1$$
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel à préciser
3. On admet que pour tout x de l'intervalle$[-2,-1]$:
$$0 \leq (x-\alpha) f'(x) - f(x) \leq \frac{(x-\alpha)^2}{e}$$
   (a) Prouver alors que pour tout entier naturel n :
$$0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \frac{(u_n-\alpha)^2}{e}$$
   (b) Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$0 \leq u_n - \alpha \leq \frac{1}{e^{2^n-1}}$$

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x.
On considère désormais la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$
2. Etablir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
   (c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
   (a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt$
   (b) En déduire :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$.
   (d) En utilisant la parité de f, montrer que l'on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variations de g.
   (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.
   (c) Soit $y \in [2,+\infty[$.
   En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0,+\infty[$.
   En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie B : étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

4. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
5. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.
   (c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
6. (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$.
   (b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :
   $$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$
   (c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
   Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2;3]$.
   (d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :
   $$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$