Correction du EB n° 2

La calculatrice est interdite. Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

N_V est le rang du premier V dans une suite de tirages indépendants avec $\mathrm{P}(V) = p$ (équiprobabilité des boules) à chaque tirage.

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ et de même } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$

1. (a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(X = k)$ signifie que l'on a k verte puis une blanche ou inversement.
   Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \mathrm{P}((N_V = k+1) \cup (N_B = k+1)) \\
&= \mathrm{P}(N_V = k+1) + \mathrm{P}(N_B = k+1) \\
&= (1-p)^k p + p^k (1-p)
\end{aligned}$$

   (b) X a une espérance si la série suivante est absoulment convergente, ce qui équivaut à la convergence simple car les termes sont tous positifs.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} k\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{M} k\left[(1-p)^k p + p^k (1-p)\right] \\
&= p\sum_{k=1}^{M} k(1-p)^k + (1-p)\sum_{k=1}^{M} kp^k \\
&= p\sum_{k=0}^{M} k(1-p)^k + (1-p)\sum_{k=0}^{M} kp^k \\
&\to p\frac{1-p}{(1-1+p)^2} = (1-p)\frac{p}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

   car $|p| < 1$ et $|1-p| < 1$.

   Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et que } E(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}\ .}$

   (c) On étudie les variations de $E(X)$ fonction de p :
   $f(p) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.
   f est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\begin{aligned}
f'(p) &= \frac{1-p+p}{(1-p)^2} + \frac{-p-1+p}{p^2} \\
&= \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}
\end{aligned}$$

   Donc

p	0		$\frac{1}{2}$		1	
$2p-1$		$-$	0	$+$		affine
$f'(p)$		$-$		$+$		
$f(p)$		$\searrow$		$\nearrow$		

   avec $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

Conclusion : $\boxed{E(X) \text{ est minimale lorsque } p = \frac{1}{2}\text{, et vaut alors } 2}$

C'est quand on a les mêmes proportion de vertes et de blanches que l'on a en moyenne, les listes monocolore le splus courtes.

2. Pour tout $(i,\, j)$ de $(\mathbb{N}_n^*)^2$:

$$\begin{aligned}(X = i \text{ et } Y = j) &= (B_1 \cap \cdots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap \cdots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \\ &\cup (V_1 \cap \cdots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1})\end{aligned}$$

les deux () étant incompatibles, et les tirages indépendants, on a

$$\mathrm{P}\left(X = i \text{ et } Y = j\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

3. (a) La loi de Y est la seconde loi marginale :
$Y\left(\Omega\right) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Y = j\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X = i \text{ et } Y = j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left[p^{i+1}\left(1-p\right)^j + \left(1-p\right)^{i+1} p^j\right] \\ \sum_{i=1}^{M} \text{''} &= \left(1-p\right)^j p \sum_{i=1}^{M} p^i + p^j\left(1-p\right) \sum_{i=1}^{M} (1-p)^i \\ &\to \left(1-p\right)^j p \left(\frac{1}{1-p} - 1\right) + p^j\left(1-p\right)\left(\frac{1}{p} - 1\right) \text{ donc} \\ \mathrm{P}\left(Y = j\right) &= \left(1-p\right)^{j-1} p^2 + p^{j-1}\left(1-p\right)^2\end{aligned}$$

(b) La convergence absolue de la série $\sum_{j\geq 1} j\mathrm{P}\left(Y = j\right)$ équivaut à sa convergence simple.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{M} j\mathrm{P}\left(Y = j\right) &= \sum_{j=1}^{M} j\left(1-p\right)^{j-1} p^2 + \sum_{j=1}^{M} jp^{j-1}\left(1-p\right)^2 \\ &= \frac{p^2}{1-p} \sum_{j=1}^{M} j\left(1-p\right)^j + \frac{\left(1-p\right)^2}{p} \sum_{j=1}^{M} jp^j \\ &\to \frac{p^2}{1-p}\frac{1-p}{p^2} + \frac{\left(1-p\right)^2}{p}\frac{p}{\left(1-p\right)^2} = 2\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Y \text{ admet une espérance et } E\left(Y\right) = 2}$

4. (a) Si $p \neq \frac{1}{2}$,
et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X = 1 \cap Y = 1\right) &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p \\ &= (1-p)\left(p^2 + (1-p)\,p\right) \\ &= p\left(1-p\right) \\ \mathrm{P}\left(X = 1\right)\mathrm{P}\left(Y = 1\right) &= \left[\left(1-p\right)p + p\left(1-p\right)\right]\left[p^2 + \left(1-p\right)^2\right] \\ &= 2\left(1-p\right)p\left[2p^2 - 2p + 1\right] \\ (1) - (2) &= \left(1-p\right)p\left[1 - 2\left(2p^2 - 2p + 1\right)\right] \\ &= \left(1-p\right)p\left[-4p^2 + 4p - 1\right] \\ &= -\left(1-p\right)p\left[2p - 1\right]^2\end{aligned}$$

et comme $p \neq 1/2$ $\mathrm{P}\left(X = 1 \cap Y = 1\right) \neq \mathrm{P}\left(X = 1\right)\mathrm{P}\left(Y = 1\right)$

Conclusion : $\boxed{\text{si } p \neq \frac{1}{2} \text{ alors } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

(b) Si $p = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=i) &= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
\mathrm{P}(Y=j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
\mathrm{P}(X=i \text{ et } Y=j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^j + \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^j \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} = \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } p = \frac{1}{2} \text{ les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$.f(x) = x + 1 + 2e^x$$

1) Recherche d'extremum local de g.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + 2e^x > 0$
   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   En $+\infty$: $f(x) = x + 1 + 2e^x \to +\infty$
   En $-\infty$: $f(x) = x + 1 + 2e^x \to -\infty$
2. En $-\infty$ on a : $f(x) - (x+1) = 2e^x \to 0$ donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote.
   Et comme $f(x) - (x+1)$, la courbe représentative de f est au-dessus de l'asymptote.
3. On a $f(-2) = -1 + e^{-2} < 0$ car $-2 < 0$ donc $e^{-2} < e^0$
   et $f(-1) = 0 + 2e^{-1} > 0$
   On applique alors le théorème de bijection :
   - ⋆ f est continue et strictement croissante sur $[-2, -1]$
   - ⋆ donc bijective de $[-2, -1]$ dans $[f(-2), f(-1)]$
   - ⋆ De plus, $0 \in [f(-2), f(-1)]$

   Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur cet intervalle.
   Conclusion : $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in [-2, -1] \text{ tel que } f(\alpha) = 0}$
   N.B. qui n'était pas demandé mais qui va servir : comme f est strictement croissante, elle est strictement négative avant α et strictement positive après.
   α est donc la seule solution sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 0$

2) Etude d'une suite réelle.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 2e^x > 0$
   Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$
   Géométriquement : Comme f est convexe, la tangente en x est en dessous de la courbe représentative.
   Cette tangente a pour équation en (t, y) : $y - f(x) = (t - x) f'(x)$ ou encore $y = f(x) + (t - x) f'(x)$
   Conclusion : $\boxed{f(x) + (t - x) f'(x) \leq f(t)}$
   Analytiquement : On étudie les variations de la différence :

$h(t) = f(t) - f(x) - (t-x) f'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = f'(t) - f'(x)$ et comme f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

t		x	
$h'(t)$	$- \nearrow$	0	$\nearrow +$
$h(t)$	$+ \searrow$	0	$\nearrow +$

Donc $h(t) \geq 0$ et $f(x) + (t-x) f'(x) \leq f(t)$

2. On utilise l'inégalité précédente avec u_n et α... Qui est qui ?
dans u_{n+1} on retrouve $f'(u_n)$. Donc $x = u_n$ et $t = \alpha$
$f(u_n) - (\alpha - u_n) f'(u_n) \leq f(\alpha) = 0$ donc $f(u_n) \leq (\alpha - u_n) f'(u_n)$ et comme $f' > 0$
$\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \alpha - u_n$ et $u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \geq \alpha$
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_{n+1}}$
Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(\alpha) = 0$, sr $[\alpha, +\infty[$ on a $f(x) \geq 0$
Comme $u_n \geq \alpha$ pour $n \geq 1$ et également pour $n = 0$, $(-1 \geq \alpha\ )$
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(u_n) \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq 0$
Conclusion : $\boxed{\text{La suite } u \text{ est décroissante}}$
Enfin, comme la suite est décroissante, on a pour tout entier n : $u_0 \geq u_n$ et finalement :
Conclusion : $\boxed{\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n \leq -1}$
3. La suite u est décroissante et minorée par α.
Elle converge donc vers une limite $\ell \geq \alpha$.
Comme $x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ $(f'(x) \neq 0)$, elle est continue en ℓ et donc $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$
Donc $f(\ell) = 0$ et $\ell = \alpha$
Conclusion : $\boxed{u_n \to \alpha \text{ quand } n \to +\infty}$
4. On admet que pour tout x de l'intervalle$[-2, -1]$:
$$0 \leq (x - \alpha) f'(x) - f(x) \leq \frac{(x-\alpha)^2}{e}$$
   (a) Comme $u_n \in [-2, -1]$, l'inégalité précédente donne :
   $$0 \leq (u_n - \alpha) f'(u_n) - f(u_n) \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{e}$$
   et en divisant par $f'(u_n) > 0$:
   $$0 \leq u_n - \alpha - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leq \frac{(u_n - \alpha)^2}{f'(u_n)\, e}$$
   Enfin, $f'(x) = 1 + 2e^x \geq 1$ donc $\dfrac{1}{f'(u_n)} \leq 1$ et en multipliant par $\dfrac{(u_n-\alpha)^2}{e} \geq 0$
   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \qquad 0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{e}}$
   (b) On procède alors par récurrence :
   - $\star$ $\dfrac{1}{e^{2^0 - 1}} = \dfrac{1}{e^0} = 1$ et comme $-2 \leq \alpha \leq -1$ alors $0 \leq -1 - \alpha \leq 1$
     Donc $0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{e^{2^0-1}}$
   - $\star$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{e^{2^n - 1}}$
     alors $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq \dfrac{(u_n - \alpha)^2}{e} \leq \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{1}{e^{2^n-1}}\right)^2 = \dfrac{1}{e^{2 \cdot 2^n - 2 + 1}} = \dfrac{1}{e^{2^{(n+1)} - 1}}$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \qquad 0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{e^{2^n-1}}}$
5. Comme $0 \leq u_n - \alpha \leq \dfrac{1}{e^{2^n-1}}$,alors u_n donne une valeur approchée de α à $\dfrac{1}{e^{2^n-1}}$ près.
Il faut donc calculer les valeurs de u_n jusqu'à ce que $\dfrac{1}{e^{2^n-1}} \leq 10^{-p}$

Exercice 3

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $1+t^2>0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Donc, en particulier, quel que soit x réel, elle est définie et continue sur $[x;2x]$ (ou $[2x;x]$ si $2x<x$).

   On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$ est bien définie quel que soit x réel.

2. Pour tout x réel, on a $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$. On effectue alors le changement de variable affine $u=-t$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^2}}(-du) \\ &= -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

   Par conséquent, $\boxed{f \text{ est une fonction impaire}}$.

3. (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive g sur $\mathbb{R}$ (qui est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est continue). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ &= \Big[g(t)\Big]_x^{2x} \\ &= g(2x)-g(x) \end{aligned}$$

   La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après les théoème généraux sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = g(2x)-g(x)$, avec g une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ (cf question précédente). Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2g'(2x)-g'(x)$, i.e :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

   On étudie le signe de $f'(x)$. Pour cela, on met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{4+4x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

   Le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe du numérateur. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant 1+4x^2 < 4+4x^2$. Donc, par stricte croissance de la racine carrée sur $[0;+\infty[$: $\sqrt{1+4x^2} < \sqrt{4+4x^2}$. Ce qui implique $\sqrt{4+4x^2}-\sqrt{1+4x^2}>0$ et donc $f'(x)>0$.
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

4. (a) Pour tout $t>0$, on a :

$$0 < t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$$

   Donc, en prenant la racine carrée :

$$0 < t \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant t+1$$

   Puis l'inverse :

$$\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \frac{1}{t}$$

Maintenant, soit $x > 0$ quelconque. Alors $0 < x < 2x$. Donc on peut intégrer l'encadrement ci-dessus sur l'intervalle $[x; 2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

C'est-à-dire :

$$\Big[\ln(t+1)\Big]_x^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \Big[\ln(t)\Big]_x^{2x}$$

Et comme $\Big[\ln(t+1)\Big]_x^{2x} = \ln(2x+1) - \ln(x+1)$ et $\Big[\ln(t)\Big]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$, on en déduit :

$$\boxed{\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)}$$

(b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(2x+1) - \ln(x+1) &= \left(\ln(x) + \ln\left(2 + \tfrac{1}{x}\right)\right) - \left(\ln(x) + \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)\right) \\ &= \ln\left(2 + \tfrac{1}{x}\right) - \ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2) - \ln(1)$ (car $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$), c'est-à-dire : $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

D'après la question précédente, on en déduit, par encadrement :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)}$$

(c) Comme la fonction f est impaire et vérifie $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$, on a également $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\ln(2)$. On en déduit (avec la question 3.b) le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\ln(2)$ $\nearrow$	$\ln(2)$

(d) La fonction f est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$, i.e de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln(2); \ln(2)[$. Or, 0 appartient à $]-\ln(2); \ln(2)[$. Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a immédiatement $f(0) = 0$ (intégrale sur un intervalle réduit à un point).

$\boxed{\text{Conclusion : L'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution réelle qui est } x = 0.}$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
   - ⋆ Si $x \geqslant 0$, alors on a immédiatement $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ car $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1 > 0$.
   - ⋆ Si $x < 0$, alors $0 < x^2 < x^2 + 1$. Donc, en prenant la racine carrée : $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, c'est-à-dire (puisque $x < 0$) : $-x < \sqrt{x^2+1}$. On en déduit que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

   Donc, dans tous les cas, on a bien $\boxed{x + \sqrt{x^2+1} > 0 \text{ quel que soit } x \text{ réel}}$.

   (b) La fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente), et elle y est dérivable (par opérations sur les fonctions dérivables). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (d'après la formule $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$) :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Les $x+\sqrt{x^2+1}$ se simplifient et il reste :

$$\boxed{h'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

(c) D'après la question précédente (et la définition de f), on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=\Big[h(t)\Big]_x^{2x}=h(2x)-h(x)$$

C'est-à-dire, d'après l'expression de h :

$$\boxed{f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

6. (a) Pour tout $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}
x-f(x)&=\int_x^{2x}1\,dt-\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt\\
&=\int_x^{2x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt\\
&=\int_x^{2x}\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}}dt\\
&=\int_x^{2x}\frac{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}dt\\
&=\int_x^{2x}\frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}dt
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{x-f(x)=\int_x^{2x}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}dt}$$

(b) Soit $x>0$ quelconque. Pour tout t réel, on a $\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\geqslant 0$ (tous les termes qui interviennent dans la fraction sont positifs). Donc, en intégrant sur l'intervalle $[x;2x]$ (on a bien $x\leqslant 2x$ car $x\geqslant 0$) :

$$\int_x^{2x}0\,dt\leqslant\int_x^{2x}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}dt$$

C'est-à-dire (d'après la question précédente) :

$$\boxed{0\leqslant x-f(x)}$$

Montrons maintenant l'autre inégalité. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $t^2+1\geqslant 1$ et donc $\sqrt{t^2+1}\geqslant 1$. Par conséquent :

$$\sqrt{t^2+1}\geqslant 1\quad\text{et}\quad\sqrt{t^2+1}+1\geqslant 2$$

En multipliant ces deux inégalités, on obtient alors :

$$\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)\geqslant 2$$

Et on en déduit :

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\leqslant\frac{t^2}{2}$$

D'où, en intégrant sur l'intervalle $[x;2x]$:

$$\int_x^{2x}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}dt\leqslant\int_x^{2x}\frac{t^2}{2}dt$$

C'est-à-dire :

$$x - f(x) \leqslant \left[\frac{t^3}{6}\right]_x^{2x}$$

Ou encore :

$$\boxed{x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3}$$

Conclusion : en combinant les deux inégalités démontrées ci-dessus, on a, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3}$$

(c) D'après l'encadrement ci-dessus, on a, pour tout $x > 0$:

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{7}{6}x^3$$

Donc, en divisant par x (qui est strictement positif) :

$$1 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1 + \frac{7}{6}x^2$$

On en déduit que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

(d) Pour tout $x < 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{-f(-x)}{x} \quad \text{par imparité de } f \\ &= \frac{f(-x)}{-x} \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\frac{f(-x)}{-x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1$ (car $-x$ tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers 0 par valeurs négatives). Donc $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 4

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables et pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0 \iff t^2 > 1 \iff t > 1$$

car $t > 0$.
Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0,1] \text{ et strictement croissante sur } [1, +\infty[}$.
On a $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = +\infty}$, et $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty}$.

2. D'après la question précédente, f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise donc une bijection}}$ de $[1, +\infty[$ sur $f\big([1, +\infty[\big) = \big[f(1), \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)\big[= [2, +\infty[$.

3. (a) g possède les mêmes variations que f, donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [2, +\infty[}$.

   (b) f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et sa dérivée ne s'annule par sur $[1, +\infty[$, donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } [2, +\infty[}$.

   (c) Soient $y \in [2, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$.

$$y = f(t) \iff y = t + \frac{1}{t} \iff ty = t^2 + 1 \iff t^2 - ty + 1 = 0\,.$$

Le discriminant de l'équation polyomiale obtenue est $\Delta = y^2 - 4 \geqslant 0$ car $y \geqslant 2$. Ainsi

$$y = f(t) \iff t = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Les deux solutions obtenues sont bien strictement positives. $g(y)$ est égal ? l'unique solution $t \geqslant 1$ de $y = f(t)$, or

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geqslant \frac{y}{2} \geqslant 1,$$

ainsi :

$$\boxed{g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}}.$$

Partie C : Étude d'une suite

1. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   • pour $n = 1$, u_1 est bien défini d'après l'énoncé et $u_1 = 1 \geqslant 1$.
   • supposons u_n bien défini et $u_n \geqslant 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
   On a $n \geqslant 1$ et $u_n \geqslant 1$ donc $nu_n \geqslant 1$ et f est bien défini sur $[1, +\infty[$, donc $f(nu_n)$ est bien défini, par conséquent $u_{n+1} = \frac{1}{n} f(nu_n)$ est bien défini.
   Par ailleurs $\frac{1}{n^2 u_n} \geqslant 0$ donc
   $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geqslant u_n \geqslant 1$$
   par hypothèse de récurrence. La propriété est donc démontrée au rang $n + 1$.
   • Finalement on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 1}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n^2 u_n} \geqslant 0$ car $u_n \geqslant 0$. Par ailleurs, $u_n \geqslant 1$ d'après la question 1), donc $v_n = \frac{1}{n^2 u_n} \leqslant \frac{1}{n^2}$.
   Finalement on a bien
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \boxed{0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}}.$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \geqslant 0$ et $v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, or $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par comparaison des séries ? termes positifs, $\boxed{\sum_{n \geqslant 1} v_n \text{ converge}}$.

   (c) Soit $n \geqslant 2$ un entier.
   $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_n - u_1 = \boxed{u_n - 1}, \end{aligned}$$
   où l'on a effectué un changement d'indice et reconnu une somme télescopique.
   On a ainsi $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$, or la série $\sum_{n \geqslant 2} v_n$ converge donc la suite de ses sommes partielles converge, par conséquent $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ vers un réel ℓ.

3. (a) Soit $k \geqslant 2$ un entier. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, donc pour tout $t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{t^2} \geqslant \frac{1}{k^2}$. Ainsi par croissance de l'intégrale,
   $$\boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2}}.$$

(b) Soient n et p des entiers tels que $2 \leqslant p < n$. A l'aide d'un changement d'indice et en reconnaissant une somme télescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n-1} v_k &= \sum_{k=p}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n-1} u_k = \sum_{k=p+1}^{n} u_k - \sum_{k=p}^{n-1} u_k \\ &= \boxed{u_n - u_p}.\end{aligned}$$

D'autre part en combinant les inégalités des questions 2a) et 3a), pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$0 \leqslant v_k \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt\,.$$

En sommant ces encadrements pour $k \in [\![p, n-1]\!]$:

$$0 \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt\,,$$

autrement dit

$$\boxed{0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt},$$

où l'on a utilisé la relation de Chasles dans le membre de droite de l'encadrement.

(c) En particulier pour $p = 2$ et $n \geqslant 3$, l'encadrement précédent donne :

$$0 \leqslant u_n - u_2 \leqslant \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leqslant 1\,,$$

ainsi

$$\boxed{u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2}.$$

Par définition on a $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{1.u_1} = 2$, donc on a $u_n \in [2,3]$, ceci pour tout $n \geqslant 3$. Par passage? la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\boxed{\ell \in [2,3]}$.

(d) Soit $p \geqslant 2$ fixé et $n > p$ un entier. On reprend l'encadrement de la question 3b) :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt\,.$$

On a par ailleurs

$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_{p-1}^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{p-1} \leqslant \frac{1}{p-1}\,,$$

ainsi

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}\,.$$

Finalement en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}}.$$