EB N° 2

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x,y), on définit la matrice $M(x,y)$ par : $M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$.

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x,y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$, c'est à dire : $E = \left\{M(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

On note $A = M(1,0)$ et $B = M(0,1)$. De plus, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout couple de réels $(x;y)$, on a $M(x,y) = xA + yB$. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
3. Calculer PD_AP^{-1}. Que remarque-t-on ?
4. Calculer $P^{-1}BP$. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que : $B = PD_BP^{-1}$.
5. En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x,y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$
6. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x,y) pour que $M(x,y)$ soit inversible.
7. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$X_{n+1} = CX_n.$$
Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x,y)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^nX_0$.
4. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 2

Une société possède un serveur vocal qui reçoit des appels consécutifs soit pour le produit A, soit pour le produit B. Les sujets des appels (produit A ou produit B) sont supposés indépendants les uns des autres.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes et seules les deux premières concernent le serveur vocal

PARTIE I : Etude de 100 appels

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5 % des appels reçus par le serveur concernent le produit A et 95 % des appels concernent le produit B. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A au cours des 100 appels reçus.

1. (a) Donner la loi de X. On précisera $X(\Omega)$ ainsi que $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.
   Une réponse argumentée est attendue.
   (b) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
2. On suppose que chaque appel concernant le produit A permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros et chaque appel concernant le produit B permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note Y le bénéfice total de la société pour 100 appels.

   Justifier que $Y = 90X + 500$. En déduire l'espérance et la variance de Y.
3. On suppose que l'on peut approcher la loi de la variable X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X.

   Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.
   À l'aide de la table de valeurs ci-dessous, Exprimer $P(X \geqslant 10)$ en fonction de λ

PARTIE II : Etude de la première série d'appels

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit une infinité d'appels consécutifs. On suppose également que 20 % des appels concernent le produit A et 80 % des appels concernent le produit B. On dit que le serveur possède une **première série d'appels de longueur** n si les n premiers appels concernent le même produit et le $(n+1)$-ième appel concerne l'autre produit. On note :

- ⋆ X_A la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit A ;
- ⋆ X_B la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit B ;
- ⋆ L la variable aléatoire égale à la longueur de la première série d'appels.

Par exemple, si les 3 premiers appels concernent le produit A, les 2 appels suivants le produit B, les 4 appels suivants le produit A, ... on symbolisera ces appels sous la forme $AAABBAAAA\dots$. Dans ce cas, on a $X_A = 1$, $X_B = 4$ et $L = 3$.

1. (a) Donner la loi de X_A. On précisera $X_A(\Omega)$ ainsi que $P(X_A = k)$ pour $k \in X_A(\Omega)$.
   Une réponse argumentée est attendue.
   Donner l'espérance $E(X_A)$ et la variance $V(X_A)$ de X_A. En déduire l'espérance de X_A^2, notée $E(X_A^2)$.
   (b) De même, donner la loi de X_B, ainsi que son espérance $E(X_B)$ et sa variance $V(X_B)$. En déduire l'espérance de X_B^2, notée $E(X_B^2)$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   (a) Décrire l'événement $(L = n) \cap (X_B = n+1)$ à l'aide d'une succession de lettres A et B.
   Décrire l'événement $(L = n) \cap (X_A = n+1)$ à l'aide d'une succession de lettres A et B.

   (b) En déduire l'expression de $P(L = n)$ en fonction de n et vérifier que :
   $$\forall n \geqslant 1, \qquad P(L = n) = 0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n).$$
3. A l'aide de la question précédente, montrer que les espérances de L et de L^2 sont données par :
   $$\begin{aligned} E(L) &= 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B), \\ E(L^2) &= 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2). \end{aligned}$$
   En déduire la valeur de l'espérance $E(L)$ et de la variance $V(L)$ de la variable aléatoire L.

Partie III

On admettra les deux résultat suivants :

$$\forall x \in [0;1[\,,\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)$$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par $u_k = -\dfrac{q^k}{k\ln(p)}$.

1. (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

   (b) Montrer, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

   On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par $P(X=k) = u_k$.
2. (a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer .

   (b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $V(X) = -\dfrac{q(q+\ln(p))}{(p\ln(p))^2}$.
3. Soit k un entier naturel non nul . On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $(X=k)$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

   (a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi qu'un des résultats afin de montrer que :

   $$P(Y=0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

   (b) Après avoir montré que , pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

   $$P(Y=n) = -\frac{p^n q^n}{n\ \ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}.$$

   En déduire , grâce à un des résultats admis, l'égalité :

   $$P(Y=n) = -\frac{q^n}{n\,(1+q)^n \ln(p)}$$

   (c) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = 1$.

   (d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln(p)$ et q .

   (e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a : $V(Y) = -\dfrac{q(q+(1+q)\ln(p))}{(\ln(p))^2}$.

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

   (a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0,+\infty[$ par : $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
   Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

(b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g_n'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 2\ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$ et calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.

(c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut $M_n = \left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$ et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

(a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

(b) Montrer par récurrence et à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente et que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

(b) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

(c) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

(d) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$.

(e) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

(f) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

(a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

(b) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(e^x - 1)$.

(c) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

(d) Reconnaître la loi de Y_0.