EB N° 2

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1[Questions basiques]

Chaque question peut être traitée indépendamment des autres.

1. Justifier que $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit f définie par $f(x) = x\ln(1-2x)$.
   (a) Donner son ensemble de définition.
   (b) Calculer $f'(x)$.
   (c) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (d) Résoudre $f(x) = x$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = 0$.
   (a) Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
   (b) Donner la limite de la suite.
4. Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, On considère deux événements A et B indépendants vérifiant $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$. Calculer $P\left(\overline{A \cup B}\right)$.
5. Une urne $\mathcal{U}_1$ contient 1 boule blanche et 2 boules noires. Une urne $\mathcal{U}_2$ contient 3 boules blanches et 1 boule noire. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le résultat est 1 ou 2, on tire une boule dans $\mathcal{U}_1$, sinon, on la tire dans $\mathcal{U}_2$. A l'issue du protocole, on tire une boule noire. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne $\mathcal{U}_2$?

Exercice 2

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrèter devant ce repère.

A chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12 ; il est gagnant si le secteur qui s'arrète devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possèdant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- ⋆ Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- ⋆ S'il perd à la $n^{ième}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{ième}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : " le joueur gagne la $n^{ième}$ partie".
   (a) Calculer les probabilité conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$, en déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*\ p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$$
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$
2. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$, on note B_k l'événement : "le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie"
   (a) A l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$
   (b) Soit $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, calculer $P(B_k)$
   (c) En déduire la probabilté q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 3

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

1. Étude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Étude du cas particulier $n = 1$.
   (a) Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1, +\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1, +\infty[$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
   (a) Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   (b) En déduire les variations de f_n sur $]-1, +\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

2. Étude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

a. Calcul de U_1.

1. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que :
$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale :
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\, dx.$$
3. Montrer que $U_1 = \frac{1}{4}$.

b. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
2. Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (On ne demande pas sa limite.)
3. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$
4. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

1. Montrer que :
$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

2. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$
3. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :
$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

Exercice 4

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n \ : \ [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,+\infty[$, par :
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:
$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1} \quad \text{où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n$$
2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.
4. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:
$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geqslant 0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1,+\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :
$$1 < x_n \leqslant 2$$
6. Écrire un programme en Scilab qui calcule une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $\mathbf{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:
$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$$
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt$$
3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1,+\infty[$:
$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2-1)$$
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2 ,$$
   puis :
$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$$
5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.