Corrigé du concours blanc 2, le 15 mai 2017

Exercice 1 (Ecricome 2016, voie E, exercice 1 modifié)

Partie A

1. Pour tout couple de réels $(x;y)$, on a
$M(x,y)=x\begin{pmatrix}3&-2&2\\-1&4&-2\\0&4&-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&-3&1\\-2&-4&1\end{pmatrix}=xM(1,0)+yM(0,1)=xA+yB$. On a alors $E=Vect(A,\ B)$, donc E est un espace vectoriel.
2. Utilisons la méthode du pivot pour déterminer P^{-1}.

$\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1\\-2&4&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ On fait $L_2\leftarrow L_2+L_1$ et $L_2\leftarrow L_3+2L_1$

$\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ On fait $L_1\leftarrow L_1-L_3$

$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ On fait $L_1\leftarrow L_1+2L_2$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ On fait $L_1\leftarrow L_1+2L_2$

On peut donc conclure que P est inversible et que : $\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}}$

3. On trouve $PD_AP^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\-1&6&-3\\-2&8&-3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2&2\\-1&4&-2\\0&4&-1\end{pmatrix}=A$.
4. On a $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Si on pose $D_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, on obtient $B=PD_BP^{-1}$.
5. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :
$M(x,y)=xA+yB=xPD_AP^{-1}+yPD_BP^{-1}=PxD_AP^{-1}+PyD_BP^{-1}=P\left(xD_A+yD_B\right)P^{-1}=PD(x,y)P^{-1}$,
en posant $D(x,y)=xD_A+yD_B=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&2x-y&0\\0&0&3x-y\end{pmatrix}$.
6. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x,y) pour que $M(x,y)$ soit inversible.
$M(x,y)$ est inversible si et seulement si $D(x,y)$ est inversible car P et P^{-1} sont toutes les deux inversibles et qu'un produit de matrices inversibles est inversible (et qu'on a aussi $D(x,y)=P^{-1}M(x,y)P$).
Or, $D(x,y)$ est une matrice diagonale, donc elle est inversible si et seulement si ses trois coefficients diagonaux sont non nuls, ce qui donne :
$\left\{\begin{array}{lcl}x&\neq&0\\2x-y&\neq&0\\3x-y&\neq&0\end{array}\right.$.
7. On a $B^2=PD_BP^{-1}PD_BP^{-1}=PD_B^2P^{-1}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=-PD_BP^{-1}=-B\in E$.

De même, on a $A^2=PD_AP^{-1}PD_AP^{-1}=PD_A^2P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}P^{-1}$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
A^2 \in E &\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : A^2 = xA + yB \\
&\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} \\
&\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = xD_A + yD_B \\
&\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 \\ 2x - y = 4 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \\
&\iff \exists x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases} \qquad \text{impossible!}
\end{aligned}$$

Conclusion : $A^2 \notin E$.

Partie B

1. Par lecture de l'énoncé : $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$CX_n = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

   Enfin, $C = A + 3B = M(1, 3)$.
3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$ (HR_n).
   Initialisation : On a $C^0 = I$, donc $C^0 X_0 = IX_0 = X_0$. On a bien $\mathcal{P}(0)$ vraie.
   Transmission : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
   Alors $X_{n+1} = CX_n \underset{HR_n}{=} CC^n X_0 = C^{n+1} X_0$. On a bien $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
   Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
4. D'après A.6, on a $C = A + 3B = P(D_A + 3D_B)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

   On peut alors montrer par récurrence que :
   pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C^n = P(D_A + 3D_B)^n P^{-1}$
   Ainsi : $C^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.
   Par suite, $X_n = C^n X_0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n \\ -1 + 3(-1)^n \\ -2 + 4(-1)^n \end{pmatrix}$.

   Comme $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a_n = 1 - 2(-1)^n \\ b_n = -1 + 3(-1)^n \\ c_n = -2 + 4(-1)^n \end{cases}}$

Exercice 2 (Ecricome 2015, voie T, exercice 3 (sauf la fin) + Edhec 2016, voie E, un bout du problème)

PARTIE I : Etude de 100 appels

1. (a) X désigne le **nombre de succès** dans la **répétition** de $n = 100$ **épreuves de Bernoulli identiques** et **indépendantes**, dont le succès « l'appel concerne le produit A » a pour probabilité $p = 0,05$. Donc X suit la loi **binomiale** de paramètres 100 et $0,05$: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,05)$.
   On a alors $X(\Omega) = [\![0\,; 100]\!]$, et,
   pour tout $k \in [\![0\,; 100]\!]$, $P(X = k) = \dbinom{100}{k}(0,05)^k(0,95)^{100-k}$.
   (b) On a immédiatement $E(X) = np = 5$ et $V(X) = np(1-p) = 5 \times 0,95 = 4,75$
2. Il y a X appels concernant le produit A, ce qui génère un revenu de $95X$, et $100 - X$ appels concernant le produit B, ce qui génère un revenu de $5(100 - X)$. Ainsi, le revenu global est : $Y = 95X + 5(100 - X) = 90X + 500$.
   D'où :
   $E(Y) = E(90X+500) = 90E(X)+500 = 950$ et $V(Y) = V(90X+500) = 90^2V(X) = 8100\times 4,75 = 38\,475$.
3. Le paramètre d'une loi de Poisson est son espérance. Or, $E(X) = 5$, donc $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$. Il vient ensuite :
$$P(X \geqslant 10) = P(Z \geqslant 10) = 1 - P(Z < 10) = 1 - P(Z \leqslant 9) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{5^k}{k!}e^{-5}.$$

PARTIE II : Etude de la première série d'appels

Conseil : bien lire le préambule et s'assurer de bien comprendre l'exemple pour avancer sur des données sûres...

1. (a) X_A désigne le **rang du premier succès** dans la **répétition** d'une **infinité** d'**épreuves de Bernoulli identiques** et **indépendantes**, dont le succès « l'appel concerne le produit A » a pour probabilité $0,2$. Donc X_A suit la loi **géométrique** de paramètre $p = 0,2 = \dfrac{1}{5}$: $X_A \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{5}\right)$.
   On a alors : $X_A(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et, pour tout $k \geq 1$, $P(X_A = k) = (0,8)^{k-1} \times 0,2$.
   On a immédiatement $E(X_A) = \dfrac{1}{p} = 5$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{0,8}{0,04} = 20$
   Puis, grâce à la formule de Kœnig-Huygens $E(X_A^2) = V(X_A) + E(X_A)^2 = 20 + 5^2 = 45$.
   (b) De même, X_B suit la loi **géométrique** de paramètre $p = 0,8 = \dfrac{4}{5}$: $X_B \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{4}{5}\right)$.
   On a alors : $X_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \geqslant 1$, $P(X_B = k) = (0,2)^{k-1} \times 0,8$.
   On a immédiatement $E(X_B) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{5}{4}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{16}{25}} = \dfrac{5}{16}$.
   Puis, grâce à la formule de Kœnig-Huygens $E(X_B^2) = V(X_B) + E(X_B)^2 = \dfrac{5}{16} + \dfrac{25}{16} = \dfrac{30}{16} = \dfrac{15}{8}$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   (a) $[L = n] \cap [X_B = n + 1]$ signifie que la première série a une longueur égale à n, et que le premier appel concernant le produit B est intervenu lors du $(n + 1)^{\text{e}}$ appel. Ainsi :
$$\boxed{[L = n] \cap [X_B = n + 1] = \underbrace{AA\dots A}_{n \text{ fois}}B}$$
   De même : $[L = n] \cap [X_A = n + 1]$ signifie que la première série a une longueur égale à n, et que le premier appel concernant le produit A est intervenu lors du $(n + 1)^{\text{e}}$ appel. Ainsi :
$$[L = n] \cap [X_A = n + 1] = \underbrace{BB\dots B}_{n \text{ fois}}A$$
   (b) Soit $n \geq 1$. On a, par indépendance des événements :
$$\begin{aligned} P(L = n) &= P(\underbrace{BB\dots B}_{n \text{ fois}}A) + P(\underbrace{AA\dots A}_{n \text{ fois}}B) = (0,8)^n \times 0,2 + (0,2)^n \times 0,8 \\ &= 0,8 \times (0,8)^{n-1} \times 0,2 + 0,2 \times (0,2)^{n-1} \times 0,8 = 0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n) \end{aligned}$$

3. On a $L(\Omega) = \mathbb{N}^*$. L admet une espérance si, et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} nP(L_n)$ converge absolument. Cette série étant à termes positifs, la convergence simple suffit. Soit $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} nP(L=n) &= \sum_{n=1}^{N} n(0,8 \times P(X_A=n) + 0,2 \times P(X_B=n)) \\ &= 0,8\left(\sum_{n=1}^{N} nP(X_A=n)\right) + 0,2\left(\sum_{n=1}^{N} nP(X_B=n)\right)\end{aligned}$$

On reconnaît le calcul des espérances des variables aléatoires X_A et X_B, qui existent puisque ce sont des variables de loi géométrique. Donc la série est convergente et L admet une espérance. Puis, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$E(L) = 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B).$$

De la même manière, L admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} n^2P(L=n)$ converge.

Soit $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^2P(L=n) &= \sum_{n=1}^{N} n^2(0,8 \times P(X_A=n) + 0,2 \times P(X_B=n)) \\ &= 0,8\left(\sum_{n=1}^{N} n^2P(X_A=n)\right) + 0,2\left(\sum_{n=1}^{N} n^2P(X_B=n)\right)\end{aligned}$$

On reconnaît le calcul des moments d'ordre 2 des variables aléatoires X_A et X_B, qui existent puisque ce sont des variables de loi géométrique. Donc la série est convergente et L possède un moment d'ordre 2. Puis, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$E(L^2) = 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2).$$

Calculs : on avait $E(X_A) = 5$, $E(X_A)^2 = 45$, $E(X_B) = \frac{5}{4}$ et $E(X_B^2) = \frac{15}{8}$.
D'où :
$E(L) = 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B) = \frac{4}{5} \times 5 + \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{17}{4}$.
$E(L^2) = 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2) = \frac{4}{5} \times 45 + \frac{1}{5} \times \frac{15}{8} = 36 + \frac{3}{8} = \frac{291}{8}$.
$V(L) = E(L^2) - (E(L))^2 = \frac{291}{8} - \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{582}{16} - \frac{289}{16} = \frac{293}{16}$.

Partie III : du gros calcul de somme qui n'a rien à voir avec le reste

1. (a) Avec les conditions de l'énoncé : q^k et $-\ln(p)$ sont positifs donc $\forall k \in \mathbb{N}^* :\ u_k = -\frac{q^k}{k\ln(p)} > 0$.

   (b) $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{q^k}{k\ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln(p)}(-\ln(1-q)) = 1$,
   en utilisant le premier résultat admis avec $q \in]0,1[$.

2. (a) Comme $q \in]0,1[$, la série qui définit $E(X)$ converge donc converge absolument car le terme général est, à une constante multiplicative près, celui d'une série géométrique, et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k = -\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{q^k}{k\ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1-q}$$

(b) Toujours avec des séries géométriques dérivées convergentes :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{q^k}{k\ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{(1-q)^2}$$

Donc, la variance de X est :

$$\begin{aligned} V(X) = \quad & E(X^2) - E(X)^2 && = -\frac{1}{\ln(p)}.\frac{q}{(1-q)^2} - \left(\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1-q}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{(1-q)^2}\left(1+\frac{q}{\ln(p)}\right) && = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{(p)^2}\left(\frac{\ln(p)+q}{\ln(p)}\right) \\ &= -\frac{q}{(p\ln(p))^2}\left(\frac{\ln(p)+q}{\ln(p)}\right). \end{aligned}$$

3. En notant $Y_{[X=k]}$ la v.a.r Y conditionnée par l'évènement $[X=k]$:

$$\forall n \in [[0,k]] : P_{[X=k]}(Y=n) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \ .$$

(a) Comme on a $Y_{[X=k]}(\Omega) = [\![0\,;k]\!]$ et que $X\ (\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$.
Par la formule des probabilités totales appliquées à l'événement $Y=0$ et avec le système complet d'événements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Y=0) \quad & = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y=0)\, P(X=k) = -\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k \frac{q^k}{k\ln(p)} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^{2k}}{k} = -\frac{1}{\ln(p)}(-\ln(1-q^2) = \frac{\ln(1-q)+\ln(1+q)}{\ln(p)} = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} \end{aligned}$$

(b) Soit k et n deux entiers naturels non nuls.
$$\frac{1}{k}\binom{k}{n} = \frac{1}{k}\frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{(k-1)!}{n(n-1)!(k-n)!} = \frac{1}{n}\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-1-(n-1))!} = \frac{1}{n}\binom{k-1}{n-1}$$
De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y=n) = \quad & \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y=n).P(X=k) && \text{(formule des probabilités totales).} \\ = \quad & -\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k}{n}.p^n(q)^{k-n}.\frac{(q)^k}{k\ln(p)} = -\frac{p^nq^n}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k}{n}.\frac{q^{2k-2n}}{k} \\ = \quad & -\frac{p^nq^n}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n} = -\frac{p^nq^n}{n\ln(p)}\frac{1}{(1-q^2)^n} && \text{(résultat admis avec } x = 1-q^2 \in [0,1[\text{).} \\ = \quad & -\frac{q^n}{n\ln(p)}\frac{1}{(1+q)^n} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=n) \quad & = P(Y=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \\ &= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{q}{1+q})^n \text{ (on montre que } \frac{q}{1+q} \in [0,1[\text{).} \\ &= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)}(-ln(1-\frac{q}{1+q})) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)}(-\ln(\frac{1}{1+q})) = 1 \end{aligned}$$

(d) les séries géométriques de raison $\frac{q}{1+q} \in [0,1[$ sont convergentes et (terme de rang 0 nul) :

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n\frac{q^n}{n\ln(p)}\frac{1}{(1+q)^n} = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{q}{1+q})^n = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1+q}\frac{1}{1-\frac{q}{1+q}} = -\frac{q}{\ln(p)}.$$

(e) On a aussi (le terme de rang 0 est nul)

$$E(Y^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 . \frac{q^n}{n\ln(p)} \frac{1}{(1+q)^n} = -\frac{1}{\ln(p)} \sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{q}{1+q})^n = -\frac{1}{\ln(p)} \frac{q}{1+q} \frac{1}{(1-\frac{q}{1+q})^2}$$
$$= -\frac{q(1+q)}{\ln(p)}.$$

D'où la variance de X :

$$\begin{aligned} V(Y) = \quad & E(Y^2) - E(Y)^2 & = -\frac{q(1+q)}{\ln(p)} - \left(\frac{q}{\ln(p)}\right)^2 \\ = -\frac{q}{\ln(p)}\left(1+q+\frac{q}{\ln(p)}\right) & & = -\frac{q}{\ln(p)}\left(\frac{(1+q)ln(p)+q}{\ln(p)}\right) \\ = -q\left(\frac{(1+q)\ln(p)+q}{(\ln(p))^2}\right). \end{aligned}$$

Exercice 3 (Ecricome 2016, voie E, exercice 2, très légèrement modifié)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$.

   (a) g_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ (comme quotient de deux fonctions C^∞ avec un dénominateur non nul), strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ car $g_0'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^3} < 0$ sur $\mathbb{R}^+$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1+x)^2} = 0.$
   L'équation de la tangente en 0 est $y = g_0'(0)(x-0) + g_0(0) = -2x+1$.
   Rq : En fait, il s'agit d'une demi-tangente, car g_0 n'est pas définie sur $]-\infty,0[$.
   Faites le dessin...

   (b) Soit $n \geqslant 1$. g_n est C^∞ sur $[0,+\infty[$ d'après les théorèmes généraux sur les fonctions C^∞ et

   $$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad g_n'(x) = \frac{n\frac{1}{1+x}(\ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4}$$

   $$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad g_n'(x) = \frac{\overbrace{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}}^{\geqslant 0}(n-2\ln(1+x))}{\underbrace{(1+x)^4}_{\geqslant 0}}$$

   D'où $g_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow n - 2\ln(1+x) \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant 2\ln(1+x) \Leftrightarrow 1+x \leqslant e^{n/2} \Leftrightarrow x \leqslant e^{n/2}-1$.
   Comme $n/2 > 0$, $x_n = e^{n/2} > 1$ et donc $x_n \in [0,+\infty[$.
   On a donc : g_n croissante sur $[0;x_n]$ et décroissante sur $[x_n;+\infty[$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) \underset{\text{en posant } y=1+x}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{(\ln y)^n}{y^2} = 0$ par croissances comparées.

   (c) D'après les variations de g_n, g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$ en $x_n = e^{n/2}-1$ qui vaut :

   $$M_n = g_n(e^{n/2}-1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

   $\ln(M_n) = n\ln\left(\dfrac{n}{2e}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = +\infty$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

   (a) Soit $A > 0$.

   $$\int_0^A g_0(t)dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1 \underset{A\to+\infty}{\to} 1,$$

   donc $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)dt$ converge et vaut 1.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que I_n converge.
Soit $A > 0$.
Posons $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$, $u'(t) = \dfrac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n$, $v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$, $v(t) = -\dfrac{1}{1+t}$.
Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(t)dt &= \left[-\frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n \frac{1}{1+t}dt \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A g_n(t)dt.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$ (par croissances comparées) et, comme I_n converge, on a $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A g_n(t)dt = I_n$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A g_{n+1}(t)dt = 0 + (n+1)I_n$, ce qui signifie que I_{n+1} converge vers $(n+1)I_n$. On conclut par principe de récurrence.

(c) Par une récurrence immédiate, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = n!$..

3. (a) • f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
• f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
• $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{n!}n! = 1$.
f_n peut donc bien être considérée comme une densité de probabilité.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x < 0$, $F_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_n(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.

(c) Pour tout $x \geqslant 0$, $F_0(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f_n(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

(d) En reprenant les calculs faits lors de l'intégration par parties (en remplaçant n par $k-1$ et A par x, on obtient :

$$\begin{aligned}F_k(x) &= \frac{1}{k!}\int_0^x g_k(t)dt = \frac{1}{k!}\left(-\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + k\int_0^x g_{k-1}(t)dt\right) \\ &= -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x g_{k-1}(t)dt = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} + F_{k-1}(x),\end{aligned}$$

et on a donc bien :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(e) En sommant l'égalité précédente pour $k = 1..n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc, en télescopant à gauche de l'égalité :

$$F_n(x) - F_0(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x},$$

et donc

$$F_n(x) = F_0(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$

(f) • Pour tout $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

- Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^k}{k!} \\
&\qquad \text{(série exponentielle de paramètre } \ln(1+x)\text{, donc convergente)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x} \exp(\ln(1+x)) = 1 - \frac{1+x}{1+x} = 0.
\end{aligned}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1+X_n)$.
   (a) On a $X_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$, donc $(1+X_n)(\Omega) = [1, +\infty[$, donc $Y_n = \ln(1+X_n)$ est bien définie et $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(\ln(1+X_n) \leqslant x) = P(1+X_n \leqslant e^x) = P(X_n \leqslant e^x - 1) = F_n(e^x - 1).$$

   (c) H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points comme composée de F_n (qui est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point (fonction de répartition de X_n)) et de $x \mapsto e^x - 1$ (qui est C^1 sur $\mathbb{R}$).
   Y_n est donc une variable à densité et une densité de Y_n est

$$h_n : x \mapsto e^x f_n(e^x - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x - 1 < 0 \\ e^x \dfrac{1}{n!} \dfrac{(\ln(1+e^x-1))^n}{(1+e^x-1)^2} & \text{si } e^x - 1 \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   (d) $h_0 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ On reconnaît la densité d'une loi $\mathcal{E}(1)$, donc $Y_0 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.