EB N° 2

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1[Questions basiques]

1. $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$. $3\times 1-1\times 2=1\neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}}$(formule du cours, chapitre 2).
2. Soit f définie par $f(x)=x\ln(1-2x)$.

   (a) f est définie si et seulement si $1-2x>0$ donc si et seulement si $\frac{1}{2}>x$. Donc, $\boxed{D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[}$.

   (b) Pour $x\in D_f$, $\boxed{f'(x)=1\times\ln(1-2x)+x\frac{-2}{1-2x}}$ (on ne demande pas de simplifier davantage...)

   (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}1-2x=+\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\ln(y)=+\infty$. Donc, par composition de limite, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-2x)=+\infty$.
   Donc, par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln(1-2x)=-\infty}$.
   De plus $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}1-2x=0$ et $\lim\limits_{y\to 0}\ln(y)=-\infty$. Donc, par composition de limite, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln(1-2x)=-\infty$.
   Donc, par produit de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x\ln(1-2x)=-\infty}$.

   (d) $f(x)=x\Leftrightarrow x\ln(1-2x)=x\Leftrightarrow x\left(\ln(1-2x)-1\right)=0$.
   On a donc $x=0$ ou $\ln(1-2x)-1=0\Leftrightarrow\ln(1-2x)=1\Leftrightarrow 1-2x=\mathrm{e}\Leftrightarrow\frac{1-\mathrm{e}}{2}=x$. Les deux solutions sont bien dans l'ensemble de définition de f (qui est ici le domaine de résolution de l'équation). $\boxed{S=\left\{\frac{1-\mathrm{e}}{2};0\right\}}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=u_1=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-u_{n+1}+\frac{1}{4}u_n=0$. C'est une suite linéaire récurrente double. On commence par résoudre $x^2-x+\frac{1}{4}=0$, ce qui donne $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times\left(-\frac{1}{4}\right)=0$ puis $x_0=\frac{1}{2}$. Donc, il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n+\mu n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   Enfin, en se servant de l'énoncé et de l'expression précédente, $1=u_0=\lambda$ et $1=u_1=\frac{\lambda+\mu}{2}$, d'où $\lambda=\mu=1$ et $\boxed{u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n}$. Comme $-1<\frac{1}{2}<1$ et par croissance comparée pour la limite du deuxième terme, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0}$.
4. Comme $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3}$, on obtient $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Puis, on a $\mathbb{P}\left(\overline{A\cup B}\right)=\mathbb{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)=\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\boxed{\frac{4}{9}}$.
   On peut aussi calculer $\mathbb{P}\left(A\cup B\right)$ via la formule du crible et en utilisant l'indépendance de A et B, puis passer au contraire.
5. Les noms des événements ci-dessous sont naturels par rapport à l'énoncé.
   On veut calculer $\mathbb{P}_N\left(U_2\right)=\frac{\mathbb{P}\left(U_2\cap N\right)}{\mathbb{P}(N)}$. Or, $\mathbb{P}\left(U_2\cap N\right)=\mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}_{U_2}(N)=\frac{4}{6}\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$, l'application numérique étant justifiée par l'énoncé (répartition des boules, 4 faces sur 6 donnant U_2 et équiprobabilité dans chaque cas).

De plus, la formule des probabilités totales appliquées à N avec le système d'événements complets (U_1, U_2) donne : $\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(U_1 \cap N) + \mathbb{P}(U_2 \cap N) = \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(N) + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$. Finalement, on obtient $\mathbb{P}_N(U_2) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{18}} = \frac{1}{6}\frac{18}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$.

Exercice 2

1. (a) Sauf pour la première partie, quand il a gagné la partie précédente, il mise sur 3 numéros parmi 12 équiprobables. Donc la probabilité qu'il gagne est $p(A_{n+1}/A_n) = 3/12 = 1/4$
Quand il a perdu, par contre, il ne mise que sur 2 numéros donc la probabilité qu'il gagne est $p\left(A_{n+1}/\overline{A_n}\right) = 2/12 = 1/6$
Comme $\left(A_n, \overline{A_n}\right)$ est un systèeme complet d'événements alors

$$\begin{aligned} p(A_{n+1}) &= p(A_{n+1}/A_n) \cdot p(A_n) + p\left(A_{n+1}/\overline{A_n}\right) \cdot p\left(\overline{A_n}\right) \\ &= \frac{1}{4}p(A_n) + \frac{1}{6}p\left(\overline{A_n}\right) \\ &= \frac{1}{4}p(A_n) + \frac{1}{6}(1 - p(A_n)) = \frac{1}{12}p(A_n) + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

et on a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$$

(b) Cette suite est arithmético-géométrique. On détermine donc un réle c tel que $c = \frac{1}{12}c + \frac{1}{6} \Leftrightarrow c = \frac{2}{11}$
On définit alors la suite u par : $u_n = p_n - c$ et on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = p_{n+1} - c = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{12}c + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}(p_n - c) = \frac{1}{12}u_n$$

la suite u est géométrique de raison 1/12 donc pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} u_1 = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{2}{11}\right) = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{11}\right) \\ p_n &= u_n + c = \frac{3}{44}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{2}{11} \to \frac{2}{11} \text{ quand } n \to +\infty \end{aligned}$$

car $\left|\frac{2}{11}\right| < 1$

2. Soit $k \in [[1; n]]$, on note B_k l'événement : "le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie"

(a) En notant $P_k = \overline{A_k}$ l'événemenet "il perd la $k^{ième}$ partie" on a :

$$B_n = P_1 \cap P_2 \cap \dots P_{n-1} \cap An$$

et

$$p(B_n) = p(P_1) \cdot p(P_2/P_1) \cdot \dots p(P_{n-1}/P_1 \cap P_2 \cap \dots P_{n-1}) \cdot p(An/P_1 \cap P_2 \cap \dots P_{n-1})$$

le conditionnement précise qu'à partir du second jeux, le joueur ne mise que sur 2 jetons donc la probabilité de perdre est de 10/12=5/6

$$p(B_n) = \frac{9}{12} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\frac{1}{6}$$

(b) **VERIFIER pour le premier tirage qui est particulier**
De même

$$\begin{aligned} B_k &= P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap A_k \cap P_{k+1} \cap \dots \cap Pn \\ p(B_k) &= p(P_1) \cdot p(P_2/P_1) \dots p(A_k/P_1 \cap \dots P_{k-1}) \\ &\cdot p(P_{k+1}/P_1 \cap \dots P_{k-1} \cap A_k) \dots p(Pn/P_1 \cap P_2 \cap \dots P_{n-1}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6} \end{aligned}$$

avec $p(P_1) = 3/4$, $p(A_k/P_1 \cap \ldots P_{k-1}) = 1/6$ car ayant perdu au tour précédent, il ne tente que 2 numéros et $p(P_{k+1}/P_1 \cap \ldots P_{k-1} \cap A_k) = 3/4$ car au tour précédent il avait gagné.
Les $n-3$ autres jeux se font avec 2 numéros et la probabilité de perdre est donc de $5/6$.
Donc $p(B_k) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$ pour $k \in [[2, n-1]]$
Et pour $p(B_1)$ on aura un gagnant et un perdant avec 3 numéros tentés et tous les autres perdants avec 2 numéros.
Donc $p(B_1) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$

(c) Ici, le nombre de gain ne suit pas une loi binômiale (les résultats ne sont pas indépendants et la probabilité change avec les jeux)

En notant B le fait de gagner exactement une fois, $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ la réunion étant disjointe,

$$q_n = p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(B_k) = \frac{3}{16}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \frac{1}{6}$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \left[\frac{3}{16}\frac{5}{6} + (n-3)\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{1}{6}\right] = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \left[\frac{5}{32} + n\frac{3}{32} - \frac{9}{32} + \frac{5}{48}\right]$$
$$= \left(-\frac{1}{48} + \frac{3}{32}n\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

Exercice 3

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

1. Étude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. h_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{n+1+nx}{(1+x)^2}$$

Et comme $x > -1$ on a $nx > -n$ et $h_n'(x) > 0$.
Donc h_n est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$

2. On a : $h_n(0) = 0$, et comme h_n est strictement croissante, sur $]-1, 0[$ on a :
$\boxed{h_n < 0 \text{ sur }]-1,0[\text{ et sur }]0,+\infty[\text{ on a } h_n > 0}$

3. Étude du cas particulier $n = 1$.

(a) $f_1(x) = x \ln(1+x)$.
La composée de $x \to 1+x$ dérivable sur $]-1, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ où ln est dérivable.
Et $x \to x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$$

(b) Donc f_1 est strictement décroissante sur $]-1, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

(a) Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \to x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (la formule pour dériver serait différente pour la puissance 0) donc (produit et somme) f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) \\ &= x^{n-1}h_n(x) \end{aligned}$$

(b) Donc si n est pair, $n-1$ est impair donc

n pair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
f_n'		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En -1, $x^n \to +1$ si n est pair et $x^n\ln(1+x) \to -\infty$ et $x^n\ln(1+x) \to +\infty$ si n impair
En $+\infty$: $x^n\ln(1+x) \to +\infty$

2. Étude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

a. Calcul de U_1.

1. Pour comparer, on met les deux expressions sous la même forme (même dénominateur) en réordonnant par rapport aux puisances de x :

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2 + (b+a)x + b + c}{x+1}$$

On a donc l'égalité **si** $a = 1$ et $b + a = 0$ et $b + c = 0$ soit $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$
Une autre rédaction est de chercher ces coefficients au brouillon et de constater que :

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

et donc que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$ conviennent

2. On peut alors déterminer une primitive (la fonction intégrée est continue sur l'intervalle d'intégration) et $x + 1 > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_{x=0}^1 \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. On a

$$U_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

et en intégrant par partie (on dérive le ln pour le faire disparaître)
$u(x) = \ln(1+x)$, u de classe C^1 sur $[0,1]$, $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$
$v'(x) = x$, v' est continue $v(x) = x^2/2$

$$\begin{aligned} U_1 &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Pour monter que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, il suffit de comparer U_n et U_{n+1}.
Comme ce sont des intégrales, on compare leurs contenus sur $[0,1]$:
$x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et comme $\ln(1+x) \geq 0$ sur $[0,1]$ (car $1+x \geq 1$) donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leq x^n \ln(1+x)$ et comme $0 \leq 1$ (ordre des bornes) on a alors
$$\int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$$
et $U_{n+1} \leq U_n$.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } U \text{ est décroissante}}$
2. Toutes ces intégrales sont positive ou nulles car le contenu est positif et les bornes sont en ordre croissant
Donc U est décroissante et minorée par 0donc convergente.
3. Pour encadrer l'intégrale, on encadre là encore le contenu. Pour obtenir $\frac{1}{n+1}$ on conserve le x^n dans cet encadrement. On se contente donc d'encadre le ln :
Si $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq 1+x \leq 2$ et comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que 1, $1+x$ et 2 en sont éléments, $\ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$.
Comme $x^n \geq 0$ alors $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$
Enfin comme $0 \leq 1$:
$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\,dx = \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$$
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}}$
4. Et comme $\dfrac{\ln 2}{n+1} \to 0$, $\boxed{\text{par encadrement } U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$

c. Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :
$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k.$$

1. Comme $-x \neq 1$ on a :
$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{(-x)^{n+1}-1}{-x-1}. \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \end{aligned}$$
2. On a donc en intégrant l'égalité précédente sur $[0,1]$:
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k dx &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{x=0}^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

d'une part et d'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\right)dx\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx+(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx\\ &= [\ln(1+x)]_0^1+(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx\\ &= \ln 2+(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx\end{aligned}$$

et finalement

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2+(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

3. On reconnaît dans la formule proposée $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$. On fait donc apparaître dans l'expression de U_n la quantité $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$:
On a

$$U_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx$$

avec $u(x)=\ln(1+x)$, u est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $u'(x)=\dfrac{1}{1+x}$
et avec $v'(x)=x^n$ continue on a $v(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ donc en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}U_n &= \left[\frac{x^{n+1}\ln(1+x)}{n+1}\right]_{x=0}^{1}-\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}dx\\ &= \frac{\ln 2}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx\end{aligned}$$

et de

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2+(-1)^n\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

on tire

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx=(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}-\ln 2\right]$$

d'où finalement

$$U_n=\frac{\ln 2}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k+1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

Exercice 4

On considère, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n\ :\ [0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in[0,+\infty[$, par :

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k x^k}{k}=-x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{-x^{2n-1}}{2n-1}+\frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,+\infty[$:

$$P_n'(x)=\frac{x^{2n}-1}{x+1}\quad\text{où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n$$

2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.
4. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:
$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geqslant 0$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n, et que :
$$1 < x_n \leqslant 2$$
6. Écrire un programme en Scilab qui calcule une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(\mathbf{x_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:
$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt$$
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt$$
3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:
$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2-1)$$
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2 ,$$
   puis :
$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$$
5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

exercice 4 On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n \;:\; [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Pour $k \geq 1$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$ donc
$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \quad \text{réindexé } h = k-1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{h+1} x^h = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^h \\ &= -\frac{(-x)^{2n}-1}{-x-1} = \frac{x^{2n}-1}{x+1} \quad \text{car } -x \neq 1 \end{aligned}$$
2. P_n' est du signe de $x^{2n}-1$ et comme $2n > 0$ la fonction $x \to x^{2n}-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ puisque $2n$ est pair) donc

x	0		1		$+\infty$
$x^{2n}-1$		$-\nearrow$	0	$\nearrow +$	
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

   en $+\infty$ on a : $P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n} = x^{2n}\left(-x^{2n-1} + \frac{x^{2-2n}}{2} + \ldots + \frac{-x^{-1}}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \to +\infty$

3. Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right) \end{aligned}$$

(b) On a donc en particulier pour $x = 2$:

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} \right)$$

Et comme $-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0$ la suite $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors croissante.

Comme de plus $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors pour tout entier $n \geq 1$: $P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$

5. On tutilise alors le théorème de bijection :
P_n est continue et strictement croissante sur $]1,2]$ donc bijective de $]1,2]$ dans $]\lim_1 f, f(2)] =]f(1), f(2)]$
Or $f(1) < 0 \leq f(2)$ donc $0 \in]f(1), f(2)]$
Et l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution $x_n \in]1,2]$
Et comme P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, elle n'a pas d'autres solutions sur cet intervalle.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, admet une solution et une seule notée x_n sur $[1, +\infty[$, et $1 < x_n \leqslant 2$
6. On programme la méthode de dichotomie pour programmer le calcul de x_2 à 10^{-3} près :On utilise pour raccorcir les calculs que $P_2(x) = -x = x^2/2 - x^3/3 + x^4/4 = x[-1 + x(1/2 + x[-1/3 + x/4])]$

```
program approche;
var a,b,c:real;
function p(x:real):real;
begin
      p:=x*(-1+x(1/2+x(-1/3+x/4)));
end;
```

II. Limite de la suite $(\mathbf{x_n})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*}$

1. On a vu précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$: $P_n'(x) = \dfrac{x^{2n} - 1}{x+1}$. P_n est donc la primitive dont on a besoin pour l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\, dt &= [P_n(t)]_0^x = P_n(x) - P_n(0) \\ &= P_n(x) \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P_n(x_n) = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t+1} = 0$ et par Chasles $\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = 0$ d'où

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\, dt = -\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t+1}\, dt \tag{(1)}$$

3. On étudie les variations de la différen,e : Soit $f(x) = t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt\left(t^{2n-2} - 1\right)$.
et pour $n \geq 1$ on aura $2n - 2 \geq 0$ donc si $t \geq 1$alors $t^{2n-2} \geq 1^{2n-2}$ d'où $f'(t) \geq 0$
Donc pour $n \geq 1$, f est croissante sur $[1, +\infty[$.
De plus $f(1) = 0$ donc pour tout $t \in [1, +\infty[$: $f(t) \geq 0$ et

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$

4. On a alors tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \geq 1$
$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}$$
comme $1 \leq x_n$ (bornes de l'intégrale croisssantes)
$$\begin{aligned}\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt &\geq \int_1^{x_n} \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}\, dt = \int_1^{x_n} n\,(t-1)\, dt = n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n} \\ &\geq \frac{n\,(x_n-1)^2}{2}\end{aligned}$$
que l'on réintroduit dansl'équation du (1) pour obtenir :
$$\frac{n\,(x_n-1)^2}{2} \leq \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt$$
intégrale que l'on majore à nouveau par $1-t^{2n} \leq 1$ d'où (bornes croissantes)
$$\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t+1}\, dt = \left[\ln(t+1)\right]_0^1 = \ln(2)$$
d'où finalement :
$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{n\,(x_n-1)^2}{2} \leq \ln(2) \quad \text{d'où} \\ 0 &< (x_n-1)^2 \leqslant \frac{2\ln 2}{n} \quad \text{et} \\ 0 &< x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } x_n - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

5. Et par encadrement $x_n - 1 \to 0$ et donc $x_n \to 1$ quand $n \to +\infty$