Exercice 1 ....

1) a) On trouve

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

b) En développant on a $A(2I-A)=I$, ce qui prouve que A est inversible avec de plus :

$$\boxed{A^{-1}=2I-A}$$

2) a) On a (binôme) : $A^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k$.

Comme $N^2=0$, pour tout entier $k\geq 2$, on a $N^k=0$, ce qui fait que seuls les deux premiers termes de la somme donnant A^n sont non nuls (pour $n\geq 2$).

On trouve : $\forall n\geq 2,\ A^n=I+nN$.

On voit que cette relation reste valable pour $n=0$ (elle donne $I=I$) et $n=1$ (elle donne $A=I+N$, ce qui est correct).

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=I+nN}$$

On en déduit, avec $N=A-I$:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=nA-(n-1)I}$$

b) Pour $n=-1$, la relation ci-dessus donne $A^{-1}=(-1)A-(-2)I=2I-A$, ce qui correspond bien au résultat trouvé à la question 1b).

3) a) Le polynôme $X^2-2X+1=(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A donc 1 est la seule valeur propre possible de A.
On vérifie que 1 est effectivement valeur propre de A en remarquant que la matrice $A-I=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ n'est pas inversible

b) Si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que $A=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$. Ceci étant manifestement faux, on conclut que A n'est pas diagonalisable.

4) a) La matrice $A-I=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ est de rang 1 donc :

$$\boxed{\operatorname{rg}(f-Id)=1}$$

b) Vérifions d'abord que u_1 et u_2 appartiennent à $\operatorname{Ker}(f-Id)$

- On a $u_1=(f-Id)(e_1)$ et on trouve $u_1=(-1,-2,1)$. Ensuite, on vérifie matriciellement que $(f-Id)(u_1)=0$.

$$\boxed{u_1 \text{ appartient à } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

- Pour $u_2=(1,0,1)$, on fait le même travail :

$$\boxed{u_2 \text{ appartient à } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

Comme $\operatorname{rg}(f-Id)=1$, on a $\dim(\operatorname{Ker}(f-Id))=2$. De plus, la famille (u_1,u_2) est une famille libre de 2 vecteurs de $\operatorname{Ker}(f-Id)$ donc on est certain que :

$$\boxed{(u_1,u_2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f-Id)}$$

5) a) En considérant trois réels *a*, *b* et *c* tels que $au_1+bu_2+ce_1=0$, on obtient : $(-a+b+c,-2a,a+b)=(0,0,0)$. On trouve rapidement $a=0$, $b=0$ et $c=0$.
Par conséquent, la famille (u_1,u_2,e_1) est libre et comme elle contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3, on peut conclure :

$$\boxed{(u_1,u_2,e_1) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

b) Comme $u_1\in\operatorname{Ker}(f-Id)$, on a $f(u_1)=u_1$. De même, on a $f(u_2)=u_2$.
Enfin, $u_1=(f-Id)(e_1)$ donc $u_1=f(e_1)-e_1$ et on en déduit : $f(e_1)=u_1+e_1$.
On trouve donc :

$$\boxed{T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

6) La matrice *P* est inversible en tant que matrice de changement de base.

Comme A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et comme T est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, e_1), on a la formule de changement de base :

$$\boxed{A = PTP^{-1}}$$

7) a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Après calculs, on trouve : $M \in E \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

En conclusion, E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Cette famille étant libre (facile à vérifier) c'est une base de E, et comme elle contient 5 vecteurs, on a :

$$\boxed{\dim E = 5}$$

b) Comme $A = PTP^{-1}$, on a :

$$NA = AN \Leftrightarrow N(PTP^{-1}) = (PTP^{-1})N \Leftrightarrow NPTP^{-1} = PTP^{-1}N$$

Comme P et P^{-1} sont inversibles, on obtient une égalité équivalente en multipliant par P^{-1} à gauche, puis par P à droite dans chaque membre de l'égalité $NPTP^{-1} = PTP^{-1}N$, ce qui donne :

$$\boxed{NA = AN \Leftrightarrow (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)}$$

c) On en déduit qu'une matrice N commute avec A si et seulement si $P^{-1}NP$ commute avec T, c'est-à-dire si $P^{-1}NP$ appartient à E.
En traduisant ceci, on trouve :

$$N = aP(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} + vPE_{2,2}P^{-1} + wPE_{2,3}P^{-1}$$

Ceci prouve que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :

$$\left(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\right)$$

Exercice 2 ....

1) On a

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!]}$$

2) a) Pour tout i de $[\![2,n-1]\!]$, tout d'abord, l'événement $B_1 \cap ... \cap B_{i-1}$ n'est pas quasi impossible, et sachant qu'il est réalisé, alors au moment de faire le i-ième tirage, il manque $i-1$ boules blanches donc il reste $(n-1)-(i-1)=n-i$ boules blanches dans l'urne et $n-i+1$ boules en tout.
Conclusion :

$$\boxed{P_{B_1\cap...\cap B_{i-1}}\left(B_i\right)=\frac{n-i}{n-i+1}}$$

b) Pour $k=1$, on a $(X=1)=N_1$ donc $P(X=1)=P(N_1)=\frac{1}{n}$.
Sinon, on a : $\forall k \geq 2$, $(X=k)=B_1 \cap ... \cap B_{k-1} \cap N_k$.
La formule des probabilités composées s'écrit alors :

$$\forall k \geq 2,\ P(X=k)=P(B_1)P_{B_1}(B_2)...P_{B_1\cap...\cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1\cap...\cap B_{k-1}}(N_k)$$

En remplaçant les probabilités calculées à la question 2a) :

$$P(X=k)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times...\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}$$

On trouve : $\forall k \geq 2$, $P(X=k)=\frac{1}{n}$.
Cette formule étant valable pour $k=1$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k)=\frac{1}{n}}$$

c) On reconnaît que X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et d'après le cours, on en déduit :

$$\boxed{E(X)=\frac{n+1}{2} \text{ et } V(X)=\frac{n^2-1}{2}}$$

3) a) Pour $k=1$, on a $(X=1)\cap(Y=0)=N_1$ donc $P([X=1]\cap[Y=0])=\frac{1}{n}$.
Sinon, $(X=k)\cap(Y=0)=B_1'\cap...\cap B_{k-1}'\cap N_k$, où on a noté B_i' l'événement « le i-ième tirage donne une boule blanche numérotée 0 ». On en déduit :

$$\forall k \geq 2,\ P([X=k]\cap[Y=0])=P(B_1')P_{B'}(B_2')...P_{B_1'\cap...\cap B_{k-2}'}(B_{k-1}')P_{B_1'\cap...\cap B_{k-1}'}(N_k)$$

En remplaçant les probabilités, on obtient :

$$\forall k \geq 2,\ P([X=k]\cap[Y=0])=\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times...\times\frac{n-k}{n-k+2}\times\frac{1}{n-k+1}$$

Après simplifications : $P([X=k]\cap[Y=0])=\frac{(n-2)!}{(n-k-1)!}\times\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{n-k}{n(n-1)}$.

Cette formule étant valable pour $k=1$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ P\big([X=k]\cap[Y=0]\big)=\frac{n-k}{n(n-1)}}$$

b) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ s'écrit :

$$P(Y=0)=\sum_{k=1}^{n}P\big([X=k]\cap[Y=0]\big)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(n-k)$$

On obtient alors :

$$\boxed{P(Y=0)=\frac{1}{2}}$$

c) On en déduit $P(Y=1)=\frac{1}{2}$ donc Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On a alors :

$$\boxed{E(Y)=\frac{1}{2}\ \text{et}\ V(Y)=\frac{1}{4}}$$

4) a) On peut proposer ce qui suit :

```
(1)  n=input(‘entrez une valeur pour n : ‘)
(2)  nB=n-1
(3)  X=1
(4)  u=grand(1,1,’uin’,1,nB+1)
(5)  while u<nB+1
(6)     nB=nB-1
(7)     u=grand(1,1,’uin’,1,nB+1)
(8)     X=X+1
(9)  end
(10) disp(X, ‘la boule noire est apparue au tirage N°’)
```

b) On peut proposer :

```
(4)  Y=0
(8)  if u==1 then Y=1
```

Exercice 3 ....

1) On trouve $u_1=\frac{2}{3}$ et $u_2=\frac{8}{15}$.

2) a) On a : $u_{n+1}-u_n=-\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt\le 0$. Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

b) Comme u_n est positif, la suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

3) a) D'après le cours sur la loi normale, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = 1$, ce que l'on peut écrire : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt = \sigma\sqrt{2\pi}$.

b) En posant $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, qui est bien strictement positif, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Par parité de la fonction intégrée, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

c) On peut étudier la fonction $t \mapsto e^{-t^2} + t^2 - 1$ ou invoquer la convexité de la fonction exponentielle pour obtenir :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2} \geq 1 - t^2}$$

d) On trouve assez vite : $\forall t \in [0,1]$, $e^{-nt^2} \geq (1-t^2)^n \geq 0$

On intègre, ce qui donne $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt$, que l'on prolonge en :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\, dt$$

D'après la question 3b), on obtient : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

On conclut :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

4) On a $\int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{1}{n+1}$.

Comme $\left(1-t^2\right)^n \geq (1-t)^n$, on obtient en intégrant ces fonctions continues, bornes dans l'ordre croissant : $u_n \geq \int_0^1 (1-t)^n \, dt$. On trouve bien :

$$\boxed{u_n \geq \frac{1}{n+1}}$$

On peut alors conclure que la série de terme général u_n diverge.

5) a) Par intégration par parties dans l'intégrale $u_{n+1} = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{n+1} dt$, avec $u(t) = t$ et $v(t) = \left(1-t^2\right)^{n+1}$, on trouve :

$$u_{n+1} = \left[t\left(1-t^2\right)^{n+1}\right]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt$$

Ceci donne bien :

$$\boxed{u_{n+1} = (2n+2)\left(u_n - u_{n+1}\right)}$$

b) On procède par récurrence :

- Pour $n=0$, on a $u_0 = 1$ et $\frac{4^0\,(0!)^2}{(2\times 0+1)!} = \frac{1!}{1!} = 1$ donc l'initialisation est faite.
- Si l'on suppose, pour un certain entier naturel n que $u_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}$, alors

d'après la relation encadrée précédente, on a : $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.

On obtient : $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{2n+2}{2n+2} = \frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!}$,
ce qui établit l'hérédité. Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

c) L'énoncé conseille d'écrire : $u_n = \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$.

Comme $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$, on a $(n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} 2\pi n \times n^{2n} e^{-2n}$ et $(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}$,
on obtient après calculs : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n+1} \times \sqrt{\pi n}$.

Soit encore :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

6) On propose

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
m=2*n+1
y=1:m
v=prod(x)
w=prod(y)
u=4^n*v^2/w
disp(u)
```

Problème ....

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

1)
- La fonction *f* est positive.
- La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1.
- $\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt = 0$ car *f* est nulle sur $]-\infty,1[$.

Pour tout $x \geq 1$, on a : $\int_1^x f(t)\,dt = 1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}$.

Comme $\frac{1}{\theta} > 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et, après passage à la limite, on a $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Finalement, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Les trois points précédents permettent de conclure :

$\boxed{f \text{ peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire } Y}$

2) Calcul de $E(X)$.

- Tout d'abord, on a $\int_{-\infty}^{1} t\,f(t)\,dt = 0$ car *f* est nulle sur $]-\infty,1[$.
- Pour tout $x \geq 1$, on trouve ($\theta \neq 1$) : $\int_1^x t\,f(t)\,dt = \frac{1}{\theta-1}\left(x^{1-\frac{1}{\theta}} - 1\right)$.

Comme $0 < \theta < \frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\frac{1}{\theta}} = 0$.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} t\,f(t)\,dt$ converge et, après passage à la limite, on a :

$$\int_1^{+\infty} t\,f(t)\,dt = \frac{-1}{\theta-1} = \frac{1}{1-\theta}$$

Les deux points précédents prouvent que l'espérance de X existe et que :

$$\boxed{E(X)=\frac{1}{1-\theta}}$$

Calcul de $E(X^2)$.

- Tout d'abord, on a $\int_{-\infty}^{1} t^2 f(t)\,dt=0$ car f est nulle sur $]-\infty,1[$.
- Pour tout $x\geq 1$, on a ($\theta\neq\frac{1}{2}$) :

$$\int_1^x t^2 f(t)\,dt=\frac{1}{2\theta-1}\left(x^{2-\frac{1}{\theta}}-1\right)$$

Comme $0<\theta<\frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2-\frac{1}{\theta}}=0$.

Par conséquent, $\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge et, après passage à la limite, on a :

$$\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\,dt=\frac{-1}{2\theta-1}=\frac{1}{1-2\theta}$$

Les deux points précédents prouvent que le moment d'ordre 2 de X existe et que :

$$E(X^2)=\frac{1}{1-2\theta}$$

La formule de Koenig-Huygens donne alors :

$$\boxed{V(X)=\frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}}$$

3) Par définition, on a : $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Ceci donne :

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}}$$

4) a) Comme F est nulle sur $]-\infty,1[$, l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ n'a pas de solution sur $]-\infty,1[$. Sur $[1,+\infty[$, $F(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{\theta}}=2\Leftrightarrow x=2^{\theta}$

Conclusion : la seule solution de l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est $M_e=2^{\theta}$.

b) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par $h(x)=2^x(1-x)$. On trouve (calcul de dérivée) que h est strictement décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et comme $h(0)=1$, on a $h(x)\leq 1$. Conclusion :

$$\boxed{\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\ 2^x(1-x)\leq 1}$$

c) D'après ce que l'on vient de voir, en l'appliquant avec $x=\theta$ qui est dans dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, et avec $E(X)=\dfrac{1}{1-\theta}$ et $M_e=2^\theta$, on a : $\dfrac{M_e}{E(X)}\leq 1$.

Comme tout est positif :

$$\boxed{M_e\leq E(X)}$$

5) a) On a, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{(X>a)}(X>a+b)=\frac{P([X>a]\cap[X>a+b])}{P(X>a)}$$

Comme b strictement positif, il reste :

$$P_{(X>a)}(X>a+b)=\frac{P(X>a+b)}{P(X>a)}$$

En remplaçant, grâce à la question 3), avec $a\geq 1$ et $a+b\geq 1$, on obtient :

$$\boxed{P_{(X>a)}(X>a+b)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}}$$

b) Lorsque a tend vers $+\infty$, $\dfrac{a}{a+b}$ tend vers 1 donc :

$$\boxed{\lim_{a\to+\infty}P_{(X>a)}(X>a+b)=1}$$

Si X représente une durée de vie d'un certain appareil, ceci signifie que plus l'appareil est ancien (traduction "réaliste" de "a tend vers $+\infty$"), plus les chances de vivre encore plus longtemps sont grandes (traduction "réaliste" de la limite qui vaut 1).

Partie 2 : simulation de X

6) a) On a $Y(\Omega)=\mathbb{R}_+$, ce qui garantit d'ores et déjà que : $\forall x<0,\ G(x)=0$.

Pour tout réel x positif, on a : $G(x)=P(Y\leq x)=P(\ln X\leq x)=P(X\leq e^x)$. On a donc :

$$\boxed{G(x)=\begin{cases}F(e^x) & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}}$$

b) Lorsque x est positif, on a :

$$F(e^x)=1-\frac{1}{(e^x)^{1/\theta}}=1-\frac{1}{e^{\frac{x}{\theta}}}=1-e^{-\frac{x}{\theta}}$$

On en déduit $G(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{\theta}x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$, ce qui montre que :

$$\boxed{Y \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \frac{1}{\theta}}$$

7) On peut proposer :

```
theta=input('entrez theta entre 0 et 1/2 :')
Y=grand(1,1,'exp',theta)
X=exp(Y)
disp(X)
```

Partie 3 : estimation d'un paramètre

8) a) On a $T_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k$ donc T_n est fonction de l'échantillon $(Y_1,\ldots,Y_n)$, mais pas fonction de θ. Ainsi T_n est un estimateur de θ.

b) Les variables Y_k ont toutes une espérance égale à θ, donc T_n a aussi une espérance et, par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(T_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(Y_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta=\frac{1}{n}\times n\theta=\theta$$

Conclusion :

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$$

c) Comme T_n est sans biais, on a $r_\theta(T_n)=V(T_n)$.

Par propriété de la variance et par mutuelle indépendance des variables $Y_1,\ldots,Y_n$, on a : $V(T_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V(Y_k)$, d'où : $V(T_n)=\frac{\theta^2}{n}$. Pour conclure, le risque quadratique de T_n est :

$$\boxed{r_\theta(T_n)=\frac{\theta^2}{n}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n)=0$, on peut affirmer (c'est une condition suffisante) que T_n est un estimateur convergent de θ.

9) a) D'après le cours, comme T_n a une espérance et une variance, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|T_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

En remplaçant espérance et variance, on trouve :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}}$$

b) En passant à l'événement contraire, on obtient : $P(|T_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$.

Ceci peut s'écrire, après quelques transformations :

$$P(\theta \in]T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon[) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \qquad (1)$$

Comme on a l'inclusion $(\theta \in]T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon[) \subset (\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon])$, on en déduit :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}}$$

c) Avec $\theta \leq \frac{1}{2}$, on a : $1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$. On peut donc prolonger l'inégalité obtenue à la question 9b), ce qui donne : $\forall \varepsilon > 0,\ P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Avec $n = 1000$, on obtient : $\forall \varepsilon > 0,\ P(\theta \in [T_{1000} - \varepsilon, T_{1000} + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{1}{4000\varepsilon^2}$.

On voit qu'il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{20} = 0,05$ pour avoir le niveau de confiance 90%. L'intervalle de confiance cherché est donc : $[T_{1000} - 0,05\ ;\ T_{1000} + 0,05]$.