Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) On a, pour tout $k \in [n+1; 2n]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ et $0 < k \leqslant 2n$.
   (b) Il résulte de 1) que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.
2. (a) Soit n un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $[0\,;1]$.
   i. Pour tout $x \in [0; 1], x(1-x) \geqslant 0$ car $x \geqslant 0$ et $1 - x \geqslant 0$.
   ii. On a :

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^2\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i\left(1 - x_i\right) = 0 \end{aligned}$$

   Or, $x_i\left(1-x_i\right) \geqslant 0$ pour tout $i \in [1; n]$, d'après i., donc $\forall i \in [\![1\,;n]\!], x_i\left(1-x_i\right) = 0$ car une somme de nombres positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls.
   Ainsi : $\forall i \in [\![1\,;n]\!], x_i \in \{0; 1\}$.

   (b) Soit n un entier naturel non nul et $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de $]0\,;1]$ tels que $x_0 < \ldots < x_n$.
   On veut montrer qu'il existe $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $x_{i+1} - x_i < \dfrac{1}{n}$.
   On suppose que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i \geqslant \dfrac{1}{n}$
   i. On a, d'après notre hypothèse : $\forall i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i \geqslant \dfrac{1}{n}$, d'où $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(x_{i+1} - x_i\right) \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}$.
   Donc $x_n - x_0 \geqslant 1$. Ainsi $x_n \geqslant x_0 + 1$
   ii. Comme $x_0 > 0$, il découle de i. que on $x_n > 1$. Ceci est absurde car $x_n \leqslant 1$.
   On en conclut qu'il existe $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $x_{i+1} - x_i < \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2

1. (a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{2k-1}}{2^{3k+2} \times 9^{k+2}} &= \frac{3}{2^5 \times 9^3} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{2(k-1)}}{2^{3(k-1)} \times 9^{k-1}} \\ &= \frac{1}{2^5 \times 3^5} \sum_{k=1}^{n} \frac{9^{k-1}}{8^{k-1} \times 9^{k-1}} \\ &= \frac{1}{6^5} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{6^5} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{8}\right)^{k} \text{ (changement d'indice)} \\ &= \frac{1}{6^5} \frac{1 - (1/8)^n}{1 - 1/8} = \frac{8}{7 \times 6^5} \left(1 - \frac{1}{8^n}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} k(k-2) =& \sum_{k=0}^{n}(k+n)(k+n-2)(\text{changement d'indice})\\
=& \sum_{k=0}^{n}\left(k^2+(2n-2)k+n(n-2)\right)\\
=& \sum_{k=0}^{n} k^2 + (2n-2)\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} n(n-2)\\
=& \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n-1)n(n+1) + (n+1)n(n-2)\\
=& n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} + n - 1 + n - 2\right)\\
=& n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} + 2n - 3\right)
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k(k-2) = \frac{n(n+1)(14n-17)}{6}$.

(c) On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^{n}[\ln(k(k+2)) - \ln((k+1)(k+3))]$(somme télescopique).

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right) = \ln(1(1+2)) - \ln((n+1)(n+3))$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right) = \ln(3) - \ln((n+1)(n+3))$.

2. (a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2\times 3^{2k-1}}{9^{k+2}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2\times 3^{-1}\times 3^{2k}}{9^2\times 9^k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2\times 3^{-1}\times 9^k}{9^2\times 9^k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2\times 3^{-1}}{3^4} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2}{3^5} = \left(\frac{2}{3^5}\right)^n$

(b) On a $\displaystyle\prod_{k=n}^{2n}(2k+1) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{2n}(2k+1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}$. Or $\displaystyle\prod_{k=0}^{2n}(2k+1) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{2n}(2k+1)\prod_{k=1}^{2n}(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}(2k)} = \frac{(4n+1)!}{2^{2n}(2n)!}$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Donc

$$\prod_{k=n}^{2n}(2k+1) = \frac{n!(4n+1)!\times 2^n}{((2n)!)^2\times 2^{2n}} = \frac{n!(4n+1)!}{((2n)!)^2\times 2^n}.$$

(c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)\times\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{k+1}\right)$ (produits telescopiques)

$\displaystyle= \frac{1}{n+1}\times\frac{n+2}{2}$

Donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

3. (a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2022 = 2022n^2$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^3 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^3\times 1 = \sum_{i=1}^{n} i^3 \sum_{j=1}^{n} 1\\ =& n\frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^3 = \frac{n^3(n+1)^2}{4}$.

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j) =& \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\\ =&2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i (\text{car i et j jouent un rôle symétrique })\\ =&2\sum_{i=1}^{n} i \times \sum_{j=1}^{n} 1\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j) = n^2(n+1)$

(d)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 =& \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j^2\\ =&2\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij\right)\ (\texttt{car} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j^2)\\ =&2\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i \sum_{i=1}^{n} j\right)\\ =&2\left(\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)\\ =&n^2(n+1)\left(\frac{2n+1}{3} + \frac{n+1}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$

(e)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j+\sum_{j=1}^{n} 1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j}=\frac{n(n+3)}{4}$.

(f)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\max(i,j)+\sum_{1\leqslant j< i\leqslant n}\max(i,j)\\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j+\sum_{1\leqslant j< i\leqslant n} i\\ &= \sum_{j=1}^{n} j^2+\sum_{i=2}^{n}(i-1)i\\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n}(i-1)i\\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2+\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-i\right)\\ &= 2\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3}-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{1,\langle i,j\leqslant n}\max(i,j)=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

Exercice 3

1. $I=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$ Après changement d'indice on obtient : $I=n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^k\times 1^{n-1-k}=n(1+1)^{n-1}$

   Donc $I=n2^{n-1}$

   $J=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$

Après changement d'indice on obtient : $J = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} - 1\right)$ or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} 1^k \times 1^{n+1-k} = 2^{n+1}$

Donc $J = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Si $n = 1$ alors $K = 1$.

Si $n > 1$ on a :

$K = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$

Après changent d'indice on obtient : $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}(-1)^k 1^{n-1-k} = (-1+1)^{n-1} = 0$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!)}\right).\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$ (Somme télescopique) .

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

3. (a) On a $\begin{pmatrix} k+1 \\ p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ p+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 \\ p+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k \\ p+1 \end{pmatrix} = a_{k+1} - a_k$ avec $a_k = \begin{pmatrix} k \\ p+1 \end{pmatrix}$.

On a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = \sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k)$ d'après ce qui précède. Donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = a_{n+1} - a_p$.

Or $a_{n+1} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$ et $a_p = \begin{pmatrix} p \\ p+1 \end{pmatrix} = 0$

Donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}$.

On a, pour tout $k \in [\![p\,;n]\!]$:

$$\begin{aligned}a\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{k(k-1)}{2}a + kb \\ &= \frac{a}{2}k^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)k\end{aligned}$$

Donc $\left(\forall k \in [\![p\,;n]\!],\ k^2 = a\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow a = 2 \texttt{ et } b = 1$.

(b) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 =& \sum_{k=1}^{n} 2\left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} k \\ 1 \end{array}\right) \\
=& 2\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c} k \\ 1 \end{array}\right) \\
=& 2\sum_{k=2}^{n}\left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c} k \\ 1 \end{array}\right) \\
=& 2\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 3 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} n+1 \\ 2 \end{array}\right) \texttt{(d'après 3.(a))} \\
=& 2\frac{(n+1)n\times(n-1)}{3\times 2\times 1}+\frac{(n+1)n}{2\times 1} \\
&= n(n+1)\left(\frac{n-1}{3}+\frac{1}{2}\right) \\
=& \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. $(a)(k+1)k! = (k+1)!$

$(b)(k+2)(k+1)k! = (k+2)!$

2. (a) On a, pour tout $k \in [\![1;n]\!], (k+1)!-k! = (k+1)k!-k!. = ((k+1))k!) = k\times k!$

Donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}((k+1)!-k!)$

(b) S_n est une somme télescopique, d'où $S_n = (n+1)!-1\,! = (n+1)!-1$

3. (a) On a, pour tout $k \in \mathbb{V}^*, (k+2)(k+1)-2(k+1)+1-k = k^2+3k+2-2k-2+1-k = k^2+1$

(b) On a, d'aprēs 3) (a) : $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+1\right)\times k! = \sum_{k=1}^{n}((k+2)(k+1)-2(k+1)+1-k)\times k!\ d'$. Par linéarité on obtient :

$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+1)k! - 2\sum_{k=1}^{n}(k+1)k! + \sum_{k=1}^{n}k! - \sum_{k=1}^{n}k\times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+2)! - 2\sum_{k=1}^{n}(k+1) + \sum_{k=1}^{n}k! - S_n.$

(c) Il découle de 3)(b) que T_n peut s'écrire :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}((k+2)!-(k+1)!) + \sum_{k=1}^{n}(k!-(k+1)!) - S_n.$$

Par télescopage on obtient :

$$T_n = (n+2)!-2!+1!-(n+1)!-S_n = (n+2)!-(n+1)!-1-S_n.$$

d) On a, d'après 2) (b), $S_n = (n+1)!-1$, d'où :

$$\begin{aligned}
T_n &= (n+2)!-(n+1)!-1-((n+1)!-1) \\
&= (n+2)!-2(n+1)! = (n+2)\times(n+1)!-2(n+1)! \\
&= (n+1)!(n+2-2) = (n+1)!n
\end{aligned}$$

4. Redémontrons le résultat de 3) (d) par récurrence.

Initialisation : Pour $n=1, T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{1}\left(k^2+1\right)k! = \left(1^2+1\right)\times 1! = 2$ et $(n+1)!n = (1+1)!\times 1 = 2.$

d'ou $T_n = (n+1)!n$ pour $n=1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier non nul n, $T_n = (n+1)!n$. Montrons $T_{n+1} = (n+2)!(n+1)$
En $_n$ effet, $T_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2+1\right) \times k! + \left((n+1)^2+1\right) \times (n+1)!$ et par hypothese de récurrence on obtient :
$T_{n+1} = (n+1)!n + \left((n+1)^2+1\right) \times (n+1)!$
Soit $T_{n+1} = (n+1)!\left(n+(n+1)^2+1\right) = (n+1)!\left(n^2+3n+2\right)$
Or, $n^2+3n+2 = (n+2)(n+1)$, d'où $T_{n+1} = (n+1)!(n+2)(n+1)$.
Donc $T_{n+1} = (n+2)!(n+1)$.
Conclusion : $\forall n \in a)^*, T_n = (n+1)!n$