Ecricome 2019, voie E.
Une solution proposée par Frédéric Gaunard (Lycée Français de Vienne).

Pour toute suggestion, remarque ou correction, n'hésitez pas à m'écrire à `frederic@gaunard.com`

Exercice 1

On considère l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E donc la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

(1) (a) Le calcul donne

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{puis} \qquad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3},$$

comme demandé.

(b) Comme $A^3 = 0$, il suit que X^3 est polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont donc à chercher parmi les racines de X^3 qui n'admet que 0. Comme A n'est pas inversible (plusieurs arguments recevables: $A^3 = 0$ donne par l'absurde une contradiction à l'inversibilité, ou bien on peut observer deux lignes opposées), 0 est bien l'unique valeurs propre de A.

(c) On résout

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$
$$\iff X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme $(-1, -1, 1)$ est non nul et qu'il engendre le noyau de A, il en forme également une base.

(d) Le seul sous-espace propre (associé à la valeur propre 0) est le noyau de A, de dimension 1 différente donc de 3. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

(2) Soient $e_1' = (-1, -1, 1), e_2' = (2, -1, 1)$ et $e_3' = (-1, 2, 1)$.

(a) La famille $\mathcal{B}'$ étant composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base.

$$\begin{aligned}
\alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3' = 0 &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 2\beta - \gamma &=& 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma &=& 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 2\beta - \gamma &=& 0 \\ -3\beta + 3\gamma &=& 0 \\ 2\gamma &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

et la famille est bien libre, ce qui permet de conclure au résultat souhaité.

(b) Le premier vecteur de cette famille est celui trouvé précédemment dans le noyau, son image est donc nulle par f. De plus

$$\begin{aligned}
f(e_2') &= f(3e_1 + e_1') = 3f(e_1) + f(e_1') = 3f(e_1) = (-1, -1, 1) \\
&= e_1'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(e_3') &= f(e_1' + 3e_2) = f(e_1') + 3f(e_2) = 3f(e_2) = (2, -1, 1) \\
&= e_2'
\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) On pose

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la matrice $\mathcal{B}$ est la matrice M.

(a) On observe immédiatement (ou on peut trouver *via* résolution du système) que

$$M = -A + I, \quad \text{ou encore} \quad \alpha = -1,\ \beta = 1.$$

(b) Notant Id l'endomorphisme identité, la relation matricielle précédente implique que $h = -f + \mathrm{Id}$ ce qui permet de calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}'$ par h. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
h(e_1') &= -f(e_1') + e_1' \\
&= e_1'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(e_2') &= -f(e_2') + e_2' \\
&= -e_1' + e_2'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(e_3') &= -f(e_3') + e_3' \\
&= -e_2' + e_3'
\end{aligned}$$

ce qui donne alors

$$M' = \mathrm{Mat}(h, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) La matrice M' est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible. Comme M et M' représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables et ont donc notamment le même rang. Ainsi, M est inversible.

(d) On observe que $M - I = -A$. Ainsi, $(M-I)^3 = (-A)^3 = 0$ d'après 1b. Comme M et I commutent, on peut développer

$$0 = (M-I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I \iff M^3 - 3M^2 + 3M = M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I.$$

On en déduit donc, par unicité de l'inverse de M, que

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I.$$

(e) Comme $M = -A + I$ et que $-A$ commute avec I, la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned} M^n &= (-A+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad (\text{car } (-A)^k \cdot I^{n-k} = (-A)^k) \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad (\text{car } A^k = 0,\ k \geq 3) \\ &= \binom{n}{0}(-A)^0 + \binom{n}{1}(-A)^1 + \binom{n}{2}(-A)^2 \\ &= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2. \end{aligned}$$

Pour $n = -1$, la formule donnerait, notant que $A = I - M$

$$M^{-1} = I + A + A^2 = I + I - M + I - 2M + M^2 = 3I - 3M + M^2,$$

ce qui est bien la relation trouvée en (d). Cette formule est donc également vraie pour $n = -1$.

Partie B

On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

(1) Par hypothèse, on a

$$VT = V \cdot V^2 = V^3 = V^2 \cdot V = TV,$$

et les deux matrices commutent. Comme V et T représentent respectivement g et f dans la même base $\mathcal{B}'$, il suit que

$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}') = VT = TV = \mathrm{Mat}(f \circ g, \mathcal{B}').$$

Si deux endomorphismes ont la même matrice dans une même base, ils sont égaux. Ainsi, $f \circ g = g \circ f$.

(2) (a) Comme les deux endomorphismes commutent et que $f(e_1') = 0$, on a

$$f(g(e_1')) = g(f(e_1')) = g(0) = 0$$

et $g(e_1')$ est bien un élément du noyau de f. Celui-ci étant engendré par e_1', il existe nécessairement un réel a tel que $g(e_1') = ae_1'$.

(b) De la (presque) même manière

$$f(g(e_2')-ae_2')=f(g(e_2'))-af(e_2')=g(f(e_2'))-af(e_2')=g(e_1')-ae_1'=0.$$

Ainsi, toujours car e_1' engendre $\mathrm{Ker}(f)$, il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $g(e_2')-ae_2'=be_1'$ ou encore

$$g(e_2')=be_1'+ae_2'.$$

(c) Toujours car g et f commutent (et d'après la question précédente),

$$f\circ g(e_3')=g\circ f(e_3')=g(e_2')=ae_2'+be_1'.$$

Ainsi,

$$f\left(g(e_3')-ae_3'-be_2'\right)=f\circ g(e_3')-af(e_3')-bf(e_2')=ae_2'+be_1'-ae_2'-be_1'=0,$$

et $g(e_3')-ae_3'-be_2'$ est à nouveau un vecteur du noyau de f.

(d) Toujours comme $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(e_1')$, il existe un réel c tel que

$$g(e_3')-ae_3'-be_2'=ce_1'\iff g(e_3')=ae_3'+be_2'+ce_1'$$

ce qui permet enfin d'écrire la matrice de g (qui est, par définition, V) comme

$$V=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}.$$

(e) Le calcul immédiat donne

$$V^2=\begin{pmatrix}a^2&2ab&b^2+2ac\\0&a^2&2ab\\0&0&a^2\end{pmatrix}.$$

Mais alors, $V^2=T$ donne en particulier $a=0$ et $2ab=1$ ce qui est impossible, rendant absurde l'hypothèse de départ.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*\times R_+^*$ par

$$f(x,y)=\frac{x}{y^2}+y^2+\frac{1}{x}.$$

Partie A

(1) Par observation du graphique représentant les lignes de niveaux de f (sur $[0.4,1.6]\times[0.5,1.5]$), il semble que f présente un minimum local en $(1,1)$ dont la valeur approximative serait de 3.01.

(2) (a) Les fonctions $(x,y)\mapsto y^2$ et $(x,y)\mapsto x$ sont polynomiales et donc $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert considéré et ne s'y annulent jamais. Leur inverse est donc également de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce même ouvert. Par produit puis par somme, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*\times R_+^*$.

(b) Les formules de dérivation donnent

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y)&=\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\\ \partial_2 f(x,y)&=-\frac{2x}{y^3}+2y\end{aligned}$$

Il suit que

$$(x,y) \text{ point critique de } f \iff \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} & = & 0 \\ \\ -\dfrac{2x}{y^3} + 2y & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 & = & y^2 \\ \\ 2x & = & 2y^4 \qquad (\text{ car } y > 0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & y \qquad (\text{ car} x, y > 0) \\ \\ y & = & y^4 \end{cases}$$

$$\iff x = y = 1.$$

Ainsi, f admet un unique point critique A de coordonnées $(1,1)$.

(c) Le calcul des dérivées secondes donne

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1} f(x,y) &= \frac{2}{x^3} \\ \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) &= \partial^2_{2,1} f(x,y) \qquad (\text{lemme de Schwarz}) \\ &= -\frac{2}{y^3} \\ \\ \partial^2_{2,2} f(x,y) &= \frac{6x}{y^4} + 2 \end{aligned}$$

Il suit que

$$H = \nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

(d) On détermine la nature du point critique à l'aide du signe des valeurs propres de la hessienne de f en A.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } H &\iff H - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\iff \det(H - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0 \\ &\iff \lambda = 5 + \sqrt{13} \text{ ou } \lambda = 5 - \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{13} < 5$ les deux valeurs propres sont strictement positives, ce qui témoigne de la présence d'un minimum local au point critique $A = (1,1)$. La valeur de ce minimum est

$$f(1,1) = 3.$$

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

(1) La fonction h_n est somme d'un polynôme et de l'inverse d'une fonction puissance qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc dérivable (et *a fortiori* continue) sur $\mathbb{R}_+^*$. Le calcul de sa dérivée donne

$$h_n'(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = nx^{n-1}\left(1 - \frac{1}{x^{2n}}\right).$$

Le signe du produit ci-dessus, sur $\mathbb{R}_+^*$, dépend de celui du membre de droite.

$$\begin{aligned} h_n'(x) > 0 &\iff 1 > \frac{1}{x^{2n}} \\ &\iff x^{2n} > 1 \iff x > 1, \end{aligned}$$

ce qui permet bien de conclure (car h_n est continue et notamment en 1) que h_n est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0;1[$.

(2) Par application du théorème de bijection à deux reprises, respectivement sur les intervalles $]0;1[$ et $]1;+\infty[$ où h_n est à chaque fois continue est strictement monotone, il vient que h_n réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]h_n(1);\lim_{x\to 0} h_n(x)[=]3;+\infty[$ et de $]1;+\infty[$ sur $]h_n(1);\lim_{x\to+\infty} h_n(x)[=]3;+\infty[$. Comme 4 appartient aux deux intervalles images, 4 possède exactement un antécédent sur chaque intervalle susmentionné que l'on note respectivement u_n et v_n vérifiant donc

$$h_n(u_n) = h_n(v_n) = 4, \qquad 0 < u_n < 1 < v_n.$$

(3) (a) Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'une part

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - x^n - 1 - \frac{1}{x^n} \\ &= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}} = \frac{x^{2n+2} - x - x^{2n+1} + 1}{x^{n+1}}.$$

Les deux quantités sont bien égales, ce qui est bien le résultat souhaité.

(b) Pour $x > 1$, on a $x - 1 > 0$ et $x^{2n+1} - 1 > 0$ et donc $h_{n+1}(x) - h_n(x) > 0$. En évaluant en $x = v_n$, il vient

$$0 < h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = h_{n+1}(v_n) - 4 \Longrightarrow h_{n+1}(v_n) \geq 4.$$

(c) Par stricte croissante de h_{n+1} sur $[1;+\infty[$, on peut obtenir que

$$h_{n+1}(v_{n+1}) = 4 \leq h_{n+1}(v_n) \Longrightarrow v_{n+1} \leq v_n$$

ou encore que la suite (v_n) est décroissante.

(4) (a) La suite (v_n) est décroissante et minorée par 1. Le théorème de convergence monotone permet alors d'affirmer qu'elle converge vers une limite ℓ satisfaisant (par passage à la limite dans les inégalités) $\ell \geq 1$.

(b) La suite (v_n) étant décroissante et convergent vers ℓ, on a $v_n \geq \ell$ et donc $v_n^n \geq \ell^n$.
Si $\ell > 1$, il suit par comparaison à une série géométrique divergente (de raison ℓ) que $v_n^n \to +\infty$, $n \to +\infty$. Mais, revenant à la définition de v_n on aurait alors

$$4 = h_n(v_n) = v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui n'est naturellement pas possible.

(c) Comme $\ell \geq 1$ et que $\ell > 1$ mène à une contraction, il suit que, nécessairement, $\ell = 1$ ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

(5) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$h_n(3) = 3^n + 1 + \frac{1}{3^n} \geq 3^n + 1 \geq 4 = h_n(v_n).$$

Comme h_n est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ dont v_n et 3 sont des éléments, il suit que $v_n \leq 3$.

(b) On propose le programme ci-dessous

```
function y=h(n,x)
    y=x^n+1+x^(-n) //une variante s'obtient avec 1/(x^n)
```

(c) On complète le programme de dichotomie. On sait que v_n est entre 1 et 3 et que $h_n(v_n) = 4$. Tant que la taille de l'intervalle de recherche est supérieure à la précision voulue (ici 10^{-5}), on continue le processus. Si l'évaluation au milieu de l'intervalle de recherche est strictement inférieure à 4, alors on décale l'intervalle de recherche à droite (h_n est croissante et dans ce cas on est pas encore passé par 4), sinon on est allé trop loin et il faut décaler à gauche. Il vient

```
function res=v(n)
    a = 1
    b = 3
    while (b-a)>10^(-5)
        c=(a+b)/2
        if h(n,c)< 4 then a=c
            else b=c
        end
   end
   res=c
endfunction
```

(d) Le code proposé en complément permet de représenter les termes $v_1, v_2^2, v_3^3..., v_{20}^{20}$ (soit les vingts premiers termes de la suite (v_n^n)). On peut conjecturer que cette suite est constante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n^n \simeq 2,6.$$

(e) On sait que $h_n(v_n) = 4$ ainsi,

$$4 = v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = \frac{(v_n^n)^2 + v_n + 1}{v_n^n} \iff (v_n^n)^2 - 3v_n^n + 1 = 0.$$

On résout alors l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ qui admet pour solution

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\sqrt{5} > 2$, il est clair que $(3 - \sqrt{2})/2 < 1$ et comme $v_n > 1$ (donc v_n^n aussi), il suit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

(f) La dernier question permet alors de retrouver la limite de (v_n). En effet,

$$v_n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(v_n^n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(0) = 1.$$

Exercice 3

Partie A

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(-t) = f(t)$.

- Si $t \geq 1$, alors $-t \leq -1$ et dans ce cas

$$f(-t) = -\frac{-1}{(-t)^3} = \frac{-1}{-t^3} = \frac{1}{t^3} = f(t).$$

- Si $t \leq -1, -t \geq 1$ et on a

$$f(-t) = \frac{1}{(-t)^3} = \frac{1}{-t^3} = \frac{-1}{t^3} = f(t).$$

- Enfin, si $-1 < t < 1$ alors $-1 < -t < 1$ et

$$f(-t) = 0 = f(t).$$

Dans tous les cas, on a bien $f(-t) = f(t)$ et f est bien paire.

(2) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}\int_1^A f(t)\mathrm{d}t &= \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc l'intégrale converge et vaut $1/2$.

(3) (a) On utilise le changement de variable $u = -t$, affine et donc licite. Comme dans ce cas $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, il suit (comme $f(-u) = f(u)$ par parité) que

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = -\int_A^1 f(-u)\mathrm{d}u = \int_1^A f(u)\mathrm{d}u.$$

Faisant tendre A vers $+\infty$ et utilisant le résultat de la question précédente il suit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut également $1/2$.

(b) On vérifie que f satisfait aux critères d'une densité de probabilité:

- f est bien positive ou nulle partout sur $\mathbb{R}$: c'est clair sur $]-1;1[$ où elle est nulle et c'est clair sur $[1;+\infty$ où elle vaut $1/t^3$. Si $t \leq 1$, $t^3 \leq -1$ et donc $-1/t^3 \geq 0$ rendant bien f positive ou nulle partout;
- f est continue sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$ comme inverse d'une fonction puissance qui ne s'annule pas et elle est naturellement continue sur $]-1;1[$ comme fonction constante. Elle n'est pas continue en -1 ni en 1 mais il s'agit d'un nombre fini de points, ne posant donc pas de problème;
- Enfin, la nullité de f sur $]-1;1[$ et la convergence des deux intégrales précédentes permet d'affirmer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Tous les critères sont satisfaits, f est bien une densité de probabilité.

(4) (a) Par définition de la fonction de répartition de X,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

- Si $x \leq -1$,

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \int_{-\infty} x\left(\frac{-1}{t^3}\right)\mathrm{d}t \\ & = & \lim\limits_{A+\infty} -\int_{-A}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\ & = & \lim\limits_{A+\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_{-A}^{x} \\ & = & \frac{1}{2x^2} \end{array}$$

- Si $x \in]-1;1[$ alors,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + 0 = \frac{1}{2}.$$

- Enfin, si $x \geq 1$,

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \int_{-\infty} xf(t)\mathrm{d}t \\ & = & \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ & = & \frac{1}{2} + \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \\ & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \\ & = & 1 - \frac{1}{2x^2}, \end{array}$$

et on a bien le résultat attendu.

(b) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t)\mathrm{d}t$$

converge. Par parité de f (et donc de $t \mapsto |t|f(t)$), et nullité de f sur $]-1:1[$, ceci revient à la convergence de l'intégrale

$$\int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

On reconnait une intégrale de Riemann convergente. Donc X admet une espérance. Mais comme $t \mapsto tf(t)$ est impaire, cette espérance est nulle (par le changement de variable $u = -t$, l'intégrale de $tf(t)$ sur $]-\infty;-1]$ est égale à l'opposée de celle sur $[1;+\infty[$). En conclusion,

$$E(X) = 0.$$

(c) X admet une variance si et seulement elle admet un moment d'ordre 2 ce qui, avec les mêmes arguments que ci-dessus, est équivalent à la convergence de l'intégrale

$$\int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

qui est cette fois une intégrale de Riemann divergente. Donc X n'admet pas de variance.

(5) Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

(a) On cherche à exprimer $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$. Commençons par observer que $|X| \geq 0$ et que donc $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < 0$. Pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) \\ &= P(X \leq x) - P(X < -x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \end{aligned}$$

Si $x \in]-1;1[$, alors $-x \in]-1,1[$ et donc $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq 1$, on a $-x \leq -1$ et donc

$$F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} - 1\frac{1}{2(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Au final, on obtient

$$F_Y(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1. \end{array} \right. .$$

La fonction de répartition F_Y de Y est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ (comme fonction constante d'une part et comme combinaison d'une constante de l'inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas d'autre part) et continue en 1 donc sur $\mathbb{R}$. On peut alors conclure que Y est une v.a à densité.

(b) Une densité de Y s'obtient en dérivant F_Y là où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire en 1. On a bien

$$f_Y(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^3}, & \text{si } x \geq 1. \end{array} \right. .$$

(c) Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_Y(t) \mathrm{d}t$$

converge. Comme f_Y est nulle en dehors de $[1;+\infty[$, il suffit de justifier la convergence et de calculer l'intégrale entre 1 et $+\infty$. Soit $A \geq 1$.

$$\int_1^A t f_Y(t) \mathrm{d}t = \int_1^A \frac{2\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^A = 2 - \frac{2}{A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Donc Y admet une espérance et $E(Y) = 2$.

Partie B

(1) Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y. Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

(a) Si $D = -1$ alors $Z = 0$, si $T = 1$, alors $Z = 1$. Donc $Z(\Omega) = \{0;1\}$. De plus, $P(Z = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$. Il suit que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. (C'est aussi une loi uniforme sur $\{0;1\}$.) Comme on peut alors écrire $D = 2Z - 1$, la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance donnent

$$E(D) = 2E(Z) - 1 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0, \qquad V(D) = 2^2 V(Z) = 4 \times \frac{1}{4} = 1.$$

(b) Comme D et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant chacune une espérance, leur produit admet également une espérance, égale au produit des espérances.

$$E(T) = E(D) \times E(Y) = 0.$$

(c) D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(D=-1),(D-1)\}$, on a

$$\begin{array}{rcl} P(T\leq x) & = & P(T\leq x\cap D=-1)+P(T\leq x\cap D=1) \\ & = & P(-Y\leq x\cap D=-1)+P(Y\leq x\cap D=1) \\ & = & P(Y\geq -x)P(D=-1)+P(Y\leq x)P(D=1) \qquad (\text{ par indépendante de } D \text{ et } Y) \\ & = & \dfrac{1}{2}P(Y\geq -x)+\dfrac{1}{2}P(Y\leq x). \end{array}$$

(d) La question précédente donne donc

$$F_T(x)=P(T\leq x)=\frac{1}{2}\left(F_Y(x)+1-F_Y(-x)\right).$$

En injectant la formule pour la fonction de répartition obtenue dans la partie précédente, on trouve

$$F_T(x)=\left\{\begin{array}{rl} \frac{1}{2x^2}, & \text{si } x\leq -1 \\ 0, & \text{si } -1<x<1 \\ 1-\frac{1}{2x^2}, & \text{si } x\geq 1 \end{array}\right.$$

On remarque que T suit la même loi que X.

(2) Soient $U\hookrightarrow\mathcal{U}(]0;1[)$ et $V=\dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

(a) On rappelle que, d'après le cours

$$F_U(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{si } x<0 \\ x, & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1, & \text{si } x\geq 1. \end{array}\right.$$

(b) Par définition, $V>00$ donc $F_V(x)=0$ si $x\leq 0$. Pour $x>00$, on a

$$\begin{array}{rcl} F_V(x) & = & P(V\leq x)=P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-U}}\leq x\right) \\ & = & P\left(1-U\geq \dfrac{1}{x^2}\right) \\ & = & P\left(U\leq 1-\dfrac{1}{x^2}\right)=F_U\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right). \end{array}$$

Or,

$$x\leq 1\Longleftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}\leq 0 \qquad \text{et} \qquad x>1\Longleftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}\in]0;1[.$$

Ainsi,

$$F_V(x)=\left\{\begin{array}{rl} 0, & \text{si } x\leq 1 \\ 1-\frac{1}{x^2}, & \text{si } x>1 \end{array}\right.$$

et on reconnait la fonction de répartition de Y. Ainsi, V et Y suivent la même loi.

(3) (a)
```
function a = D(n)
    a=zeros(1, n)
    for k=1:n
        if rand() <=1/2 then
            a(k)=-1
        else
            a(k)=1
        end
    end
endfunction
```

(on aurait pu proposer une variante avec la commande `ones(1,n)` et sans `else`).

(b) Le programme proposé semble vouloir (il manque un point pour réaliser une opération pointée `c=a./sqrt(1-b)`) calculer la moyenne empirique d'un $n-$échantillon de T obtenu en simulant D avec la fonction précédente et Y par inversion avec la variable V et la loi uniforme. La moyenne empirique étant un estimateur sans biais de l'espérance, on s'attend donc à une approximation de celle-ci, soit 0. Seul problème ici, la variable T n'admet pas de variance, empêchant alors de justifier (par application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev) de la convergence de l'estimateur susnommé et rendant ambigüe la réponse attendue ici.