ECRICOME

Voie E

Mercredi 12 avril 2017

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3.
On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Etude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $w = (1,0,1)$, $v = f(w) - w$, $u = f(v) - v$.
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.
9. Soit $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$, alors $\mathrm{NT} = \mathrm{TN}$. En déduire que N est de la forme

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   où a, b et c sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.
10. Montrer que l'équation matricielle $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.
11. L'ensemble E des matrices appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ est-il un espace vectoriel ?

Solution.
Partie A

1. Rapidement, $(\mathrm{A}-\mathrm{I})^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 010 & \end{pmatrix}$ et $(\mathrm{A}-\mathrm{I})^3 = 0_3$.
2. D'après le résultat précédent, le polynôme $(\mathrm{X}-1)^3$ étant un polynôme annulateur de A, 1 est la seule valeur propre possible. Puisque $(\mathrm{A}-\mathrm{I})^3 = 0_3$, on en déduit que $\mathrm{A}-\mathrm{I}$ n'est pas inversible, et donc que 1 est bien valeur propre de A
   Bilan : 1 est l'unique valeur propre de A.
3. 0 n'étant pas une valeur propre de A, A est inversible.

   Si A était diagonalisable, puisque 1 est son unique valeur propre, elle serait semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ I_3, et donc $\mathrm{A} = \mathrm{PI}_3\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}_3$, c'est qui est absurde.
   Bilan : A est inversible mais n'est pas diagonablisable

> **Remarque.** — En regardant la suite de l'énoncé, où on trigonalise A (partie C), on doit se douter que A n'est pas diagonalisable.

Partie B

4. $x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$ et à valeur dans $]0;2[\subset]0,+\infty[$. La fonction racine étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$, par composée, φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$. On a alors, pour $x \in]-1,1[$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$$

   Ainsi, $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$ et $\varphi''(0) = -\frac{1}{4}$.

5. φ étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1;1[$, elle admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 qui s'écrit
$$\sqrt{1+x} = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$
ce qui donne
$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0}$$

6. En développant :
$$\begin{aligned}
(\mathrm{P}(x))^2 &= \left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)^2\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{64}x^4\\
&= 1+x-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{64}x^4
\end{aligned}$$

7. En utilisant le résultat $\mathrm{C}^3 = 0_3$ et donc $\mathrm{C}^4 = 0_3$, on en déduit que
$$(\mathrm{P}(\mathrm{C}))^2 = \mathrm{I} + \mathrm{C} - 0 + 0 = \mathrm{I} + \mathrm{C} = \mathrm{A}$$
Ainsi, la matrice $\mathrm{M} = \mathrm{P}(\mathrm{C})$ vérifie $\mathrm{P}(\mathrm{C})^2 = \mathrm{A}$.
Bilan : la matrice $\mathrm{M} = \mathrm{P}(\mathrm{C}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$.

Partie C

Par définition, remarquons que $f(x,y,z) = (y+2z, -x+2y+2z, -3x+3y+z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

8.
   (a) On a $v = f(w) - w = (1,1,-1)$ et $u = f(v) - v = (-2,-2,0)$.

   (b) La famille $\mathscr{B}'$ étant de cardinal 3, égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que celle-ci est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $au + bv + cw = (0,0,0)$. On a alors
   $$(-2a+b+c, -2a+b, -b+c) = (0,0,0)$$
   soit, après résolution rapide, $a = b = c = 0$, et donc la famille est libre.
   Bilan : la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Dans $\mathscr{B}'$:
   $$f(w) = v + w, \quad f(v) = u + v \quad \text{et} \quad f(u) = (-2,-2,0) = u$$
   Ainsi, dans la matrice $\mathscr{B}'$, la matrice de f est
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{T}$$

(d) Puisque dans la base $\mathscr{B}'$, la matrice de f est T, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}'$, on a, par la formule du changement de base

$$\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$$

9. (a) Supposons que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$. Alors $\mathrm{N}^3 = \mathrm{NT} = \mathrm{TN}$ selon que l'on multiplie à gauche ou à droite. Et donc $\mathrm{NT} = \mathrm{TN}$. Notons $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors, la condition $\mathrm{NT} = \mathrm{TN}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

ce qui donne $d = 0, a = e, b = f$ pour la première ligne, $g = 0, nd = h = 0, e = i = a$ pour la deuxième ligne et enfin $g = 0, h = 0$. En regroupant, N s'écrit donc

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(b) D'après ce qui précède, si $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$ alors N s'écrit sous la forme $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Mais alors, $\mathrm{N}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Pour que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$, il faut alors

$$a^2 = 1, 2ab = 1, b^2 + 2ac = 0$$

soit deux possibilités (car $a^2 = 1$ donne $a = 1$ ou $a = -1$:

$$a = 1, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad a = -1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{8}$$

Ainsi, on dispose de deux matrices possibles :

$$\mathrm{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{N}_1$$

et on vérifie rapidement qu'elles vérifient toutes les deux $\mathrm{N}_1^2 = \mathrm{N}_2^2 = \mathrm{T}$.

10. En utilisant la question 8d), $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ si et seulement si $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}^2\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{T}$, soit encore $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})^2 = \mathrm{T}$ (puisque $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}) = \mathrm{PM}^2\mathrm{P}$). D'après la question 9$b$), $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ si et seulement si $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \mathrm{N}_1$ ou N_2.
Bilan : On dispose donc de deux solutions :

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{PN}_1\mathrm{P}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_2 = \mathrm{PN}_2\mathrm{P}^{-1} = -\mathrm{M}_1$$

11. L'ensemble E ne contient pas la matrice nulle : il ne peut donc pas être un espace vectoriel.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall\ x > 0,\ \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.
2. Etudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

   On fera apparaitre dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.
3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

   Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $\mathrm{U} = (\mathbb{R}^{+*})^2$ par :

$$\forall\ (x,y) \in \mathrm{U},\quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$$

4. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
5. Calculer les dérivées partielles premières de f.
6. Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathrm{U}$:

$$(x,y) \text{ est un point critique de f} \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

   Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.
9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1,z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

10. On pose $\mathrm{M} = \nabla^2(f)(z_1,z_1)$, $\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.
11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Solution.

Partie A

1. En écrivant $ax^{2a} = a\mathrm{e}^{2a\ln(x)}$, on en déduit, puisque $a > 0$, par composée, que

$$\lim_{x\to 0} ax^{2a} = a$$

ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty}$$

Enfin, puisque pour $x > 0$ on a

$$\varphi(x) = \ln(x)\left(1 - a\frac{x^{2a}}{\ln(x)}\right)$$

et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{2a}}{\ln(x)} = +\infty$ par croissance comparée $(2a > 0)$, par somme puis produit, on en déduit donc que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty}$$

2. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonction logarithme et puissance qui sont elles-mêmes de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On a alors, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} \\ &= \frac{1-2a^2x^{2a}}{x} \end{aligned}$$

Puisque $x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $1-2a^2x^{2a}$. Or

$$\begin{aligned} 1-2a^2x^{2a} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a^2} > x^{2a} \quad (\text{car } 2a^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) > 2a\ln(x) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+*} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right)} > x \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

en notant $x_0 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right)} = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$, on a $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		x_0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\varphi(x_0)$	↘	$-\infty$

avec $\varphi(x_0) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - \frac{1}{2a}$.

3. D'après le tableau de variations, et pour pouvoir appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des intervalles $]0;x_0[$ et $]x_0;+\infty[$, il faut et il suffit que $\varphi(x_0)>0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_0)>0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right)-\frac{1}{2a}>0\\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2a^2}\right)>1 \quad \text{car } \frac{1}{2a}>0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a^2}>\mathrm{e} \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante}\\
&\Leftrightarrow \quad 2a^2<\frac{1}{\mathrm{e}} \quad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+*}\\
&\Leftrightarrow \quad a<\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}} \quad \text{car la fonction racine est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $a<\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, en appliquant le théorème de la bijection (fonction continue, strictement monotone) sur $]0;x_0[$ et sur $]x_0;+\infty[$, on obtient deux et seulement deux solutions, $z_1\in]0;x_0[$ et $z_2\in]x_0;+\infty[$. Si $a=\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution : x_0, et enfin si $a>\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x)=0$ n'admet aucune solution.

Partie B

4. Les fonctions $(x,y)\mapsto x$, $(x,y)\mapsto y$ et $(x,y)\mapsto xy$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U car polynomiales. Puisqu'elles sont strictement positives sur U, et que ln et $x\mapsto x^a$ sont $\mathscr{C}^2$ sur leur domaine de définition, par composée, on en déduire que f est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

5. Pour tout $(x,y)\in$ U :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\ln(y)}{x}-ax^{a-1}y^a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\ln(x)}{y}-ax^ay^{a-1}$$

6. Si (x,y) est un point critique, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$, soit, en multipliant par x ou y :

$$\ln(y)=ax^ay^a \quad \text{et} \quad \ln(y)=ax^ay^a$$

on en déduit donc que $\ln(y)=\ln(x)$ et donc $y=x$ et que $ln(x)=ax^{2a}$ soit $\varphi(x)=0$.
Réciproquement, si $x=y$ et $\varphi(x)=0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ et donc (x,y) est un point critique.

7. Dans le cas $a<\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, en utilisant la question 3 de la partie A, (x,y) est un point critique si et seulement si $x=y$ et $\varphi(x)=0$, c'est-à-dire $x=y=z_1$ ou $x=y=z_2$. Il y a deux points critiques : (z_1,z_1) et (z_2,z_2).
Bilan : Toujours d'après la question 3 de la partie A, on en déduit que
    — Si $a<\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, il y a deux points critiques : (z_1,z_1) et (z_2,z_2).
    — Si $a=\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, il y a un unique point critique : $\left(\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}},\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}\right)$.
    — Enfin, si $a>\sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, il n'y a aucun point critique

Partie C

8. En partant de l'expression des dérivées premières, et en utilisant le théorème de Schwarz (car la fonction est $\mathscr{C}^2$), on a, pour tout $(x,y) \in \mathrm{U}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{\ln(y)}{x^2} - a(a-1)x^{a-2}y^a \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{1}{xy} - a^2 x^{a-1} y^{a-1} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{\ln(x)}{y^2} - a(a-1)x^{a-2}y^a
\end{aligned}$$

9. Au point (z_1, z_1) qui est un point critique, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(z_1,z_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_1,z_1) = 0$, c'est-à-dire $\ln(z_1) = az_1^{2a}$. Ainsi, en utilisant les expressions précédentes et en remplaçant $\ln(z_1)$ par az_1^{2a} :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1,z_1) = -\frac{az_1^{2a}}{z_1^2} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -az_1^{2a-2} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -a^2 a_1^{2a-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1,z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1,z_1) = -\frac{az_1^{2a}}{z_1^2} - a(a-1)z_1 - 2a - 2 = -a^2 z_1^{2a-2}$$

On en déduit donc bien

$$\nabla^2(f)(z_1,z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

10. Par calcul,

$$\mathrm{MX}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}\mathrm{X}_1$$

$$\mathrm{MX}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} \\ frac1z_1^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2}\mathrm{X}_2$$

Ainsi, M possède deux valeurs propres distinctes (car $a \neq 0$ et $z_1 \neq 0$) :

$$\lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{z_1^2}$$

Or

$$\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \frac{1 - 2a^2 z_1^{2a}}{z_1^2} = \frac{1}{z_1}\varphi'(z_1)$$

Puisque $z_1 \in]0; x_0[$, $\varphi'(z_1) > 0$ et donc $\lambda_1 > 0$.
Les deux valeurs propres sont de signe contraire.
Bilan : le point (z_1, z_1) est un point selle.

11. La hessienne est de la même forme :

$$\nabla^2(f)(z_2,z_2)=\begin{pmatrix} -a^2 z_2^{2a-2} & \frac{1}{z_2^2}-a^2 z_2^{2a-2} \\ \frac{1}{z_2^2}-a^2 z_2^{2a-2} & -a^2 z_2^{2a-2}\end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres, comme précédemment, sont

$$\lambda_1'=\frac{1}{z_2^2}-2a^2 z_2^{2a-2} \quad \text{et} \quad \lambda_2'=-\frac{1}{z_2^2}$$

Or, cette fois-ci, $z_2\in]x_0;+\infty[$, et donc $\varphi'(z_1)<0$. Les deux valeurs propres sont négatives.
Bilan : le point (z_2,z_2) est un maximum local.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k=\sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n=10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2,4,1,5,9$, alors on obtient : $S_1=2, S_2=6, S_3=7, S_4=12, S_5=21$ et $T_{10}=4$.

Partie A

1. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(T_n=1)$.
   (c) Montrer que :
   $$\mathbb{P}(T_n=n)=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
3. Dans cette question, $n=2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n=3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3)=\frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
6. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisant un système complet d'évènements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer que :
   $$\forall\ i\in[\![k+1,n]\!],\quad \mathbb{P}(S_{k+1}=i)=\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\mathbb{P}(S_k=j)$$

7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}, \binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:
$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$
   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathscr{H}_k$ la proposition :
$$\text{“}\forall\ i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}\text{''}$$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{H}_k$ est vraie.
8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les évènements $[\mathrm{T}_n > k]$ et $[\mathrm{S}_k \leqslant n-1]$.
   (b) En déduire que : $\forall\ k \in [\![0, n-1]\!], \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k)$, puis que $\mathbb{E}(\mathrm{T}_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(\mathrm{T}_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(\mathrm{T}_n)_{n \geqslant 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.
   (a) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) = 1$.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k) = \frac{1}{k!}$$
13. Démontrer alors que $(\mathrm{T}_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.
14. On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

Programme Scilab 1 : Loi de T

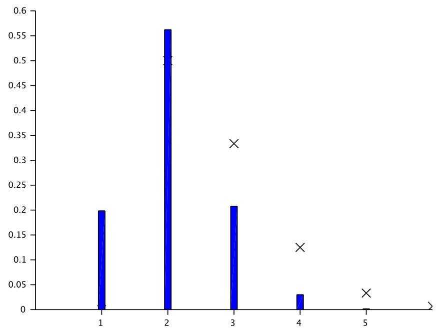
```
function y=T(n)
    S=...............
    y=...............
    while ..........
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S=S+tirage
        y=..........
    end
endfunction
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

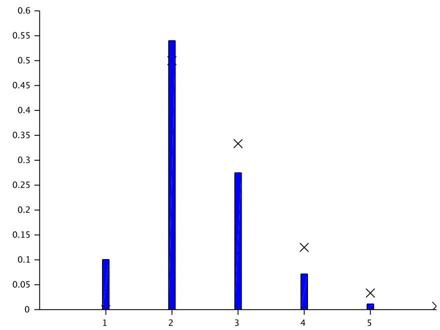
Programme Scilab 2 : Convergence en loi

```
function y=freqT(n)
    y=zeros(1,n)
    for i=1:100000
        k=T(n)
        y(k)=y(k)+1
    end
    y=y/100000
endfunction

function y=loitheoY(n)
    y=zeros(1,n)
    for k=1:n
        y(k)=(k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction

clf
n=input('n= ?')
plot2d(loitheoY(6),style=-2)
x=freqT(n)
bar(x(1:5))
```

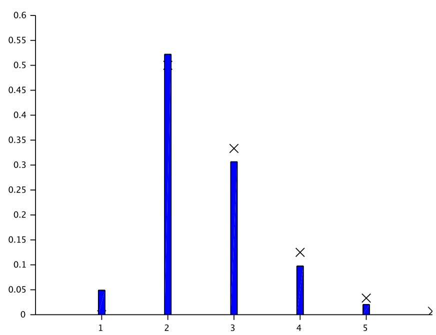
L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous :



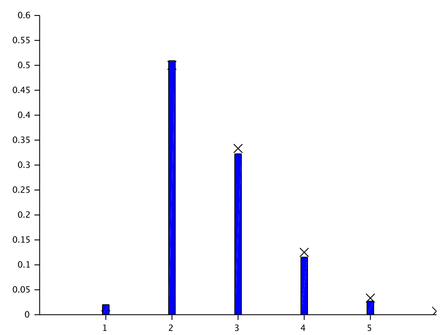
n=5



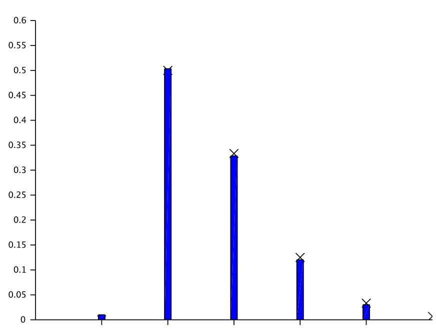
n=10



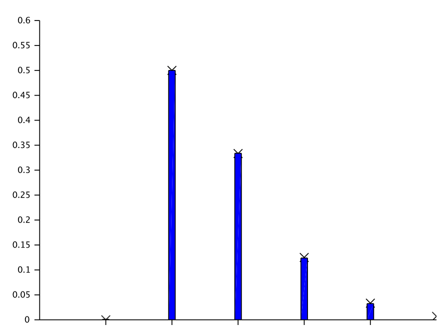
n=20



n=50



n=100



n=1000

(a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

(b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 13.

Solution.

Partie A

1. Les tirages étant indépendants (puisqu'avec remise), X_K suit donc une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, d'espérance $\mathbb{E}[X_k]=\frac{n+1}{2}$.
2. (a) T_n est un entier compris entre 1 (cas où on obtient la boule n au premier tirage) à n (cas où on obtient $n-1$ fois la boule 1). Ainsi
$$T_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$$
   (b) Le cas $T_n=1$ correspond au cas où on obtient n au premier tirage. Ainsi
$$\mathbb{P}(T_n=1)=\mathbb{P}(X_1=n)=\frac{1}{n}$$
   (c) Le cas $T_n=n$ correspond au cas où on obtient $n-1$ fois le nombre 1, puis une boule quelconque au $n$ième tirage. Ainsi
$$\mathbb{P}(T_n=n)=\mathbb{P}(X_1=1\cap X_2=1\cap\cdots\cap X_{n-1}=1)\underset{\text{par indépendance}}{=}\underbrace{\frac{1}{n}\times\cdots\times\frac{1}{n}}_{n-1\text{ fois}}=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
3. Pour $n=2$, $T_2(\Omega)=\{1,2\}$, avec $\mathbb{P}(T_2=1)=\frac{1}{2}$ et donc (puisqu'il s'agit d'une loi de probabilité) $\mathbb{P}(T_2=2)=\frac{1}{2}$.
Bilan : $T_2\hookrightarrow\mathscr{U}(\{1;2\})$.
4. On a $T_3(\Omega)=\{1,2,3\}$. D'après la question 2, on a :
$$\mathbb{P}(T_3=1)=\frac{1}{3}\quad\text{et}\quad\mathbb{P}(T_3=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$
et donc $\mathbb{P}(T_3=2)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{5}{9}$.
On a alors
$$\mathbb{E}[T_3]=\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$$

Partie B

5. Pour $k\in\mathbb{N}^*$ fixé, S_k est un entier compris entre k (cas où on obtient k fois la boule 1) à $k\times n$ (cas où on obtient k fois la boule n). Ainsi
$$S_k(\Omega)=[\![k;kn]\!]$$
6. (a) Par définition de S_k :
$$S_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}X_i=\sum_{i=1}^{k}X_i+X_{k+1}$$
et donc $\boxed{S_{k+1}=S_k+X_{k+1}}$.
   (b) D'après $S_k(\Omega)$, l'ensemble $\left([S_k=j]\right)_{k\leqslant j\leqslant kn}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour $i\in[\![k+1,n]\!]$:
$$\mathbb{P}(S_{k+1}=i)=\sum_{j=k}^{kn}\mathbb{P}((S_k=j)\cap(S_{k+1}=i))$$

Or si $j \geqslant i$, $(S_k = k) \cap (S_{k+1} = i) = \emptyset$, car $X_{k+1} \geqslant 1$ donc $S_{k+1} > S_k$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}((S_k = j) \cap (S_{k+1} = i)) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)\mathbb{P}_{(S_k=j)}(S_{k+1} = i) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)\mathbb{P}_{(S_k=j)}(S_k + X_{k+1} = i) \quad \text{d'après } 6a) \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)\underbrace{\mathbb{P}(X_{k+1} = i - j)}_{=\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Bilan : pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$$

7. (a) La formule du triangle de Pascal garantit que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leqslant j - 1$:

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$$

(b) Par récurrence sur i. Si $i = k - 1$, on a

$$\sum_{j=k}^{k} \binom{j-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$$

Pour l'hérédité, on suppose que pour un certain i fixé supérieur ou égal à $k+1$, on a

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} \\
&= \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{i}{k} \quad \text{par la formule du triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

Ainsi, la proposition est héréditaire.
Bilan : pour tout $i \geqslant k+1$, on a

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

(c) Pour $k=1$, la proposition s'écrit $\mathbb{P}(S_1)=1=\frac{1}{n}$, ce qui est vrai puisque $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,n]\!])$.
Supposons la proposition vraie pour un certain entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. Mais alors, pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1}=i) &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\mathbb{P}(S_k=j) \quad \text{question } 6b) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1}\frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1} \quad \text{hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k} \quad \text{question } 7c)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{H}_{k+1}$ est vraie.
Bilan : par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{H}_k$ est vraie pour $k \in [\![1,n]\!]$.

8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Si $T_n(\omega) > k$, cela signifie (par définition) que $S_k(\omega) \leqslant n-1$ (on n'a pas dépassé n au temps k).
Réciproquement, si $S_k(\omega) \leqslant n-1$, par définition, $T_n(\omega) > k$.
Bilan : $[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1]$.

(b) En utilisant la question $7c$, pour $k \in [\![O, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n > k) &= \mathbb{P}(S_k \leqslant n-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(S_k=i) \\
&= \sum_{i=k}^{n-1}\mathbb{P}(S_k=i) \quad \text{car } [S_k=i]=\emptyset \text{ si } i<k \text{ puisque } S_k(\Omega)=[\![k,kn]\!] \\
&= \sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \\
&= \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} \quad \text{question } 7c)
\end{aligned}$$

Bilan : pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.

9. Remarquons que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(T_n > k) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{P}(T_n=i) \\
&= (\mathbb{P}(T_n=1)+\cdots+\mathbb{P}(T_n=n)) + (\mathbb{P}(T_n=2)+\cdots+\mathbb{P}(T_n=n))+\cdots+ \\
&\quad (\mathbb{P}(T_n=n-1)+\mathbb{P}(T_n=n)) + (\mathbb{P}(T_n=n)) \\
&= \mathbb{P}(T_n=1)+2\mathbb{P}(T_n=2)+\cdots+n\mathbb{P}(T_n=n) \\
&= \sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(T_n=k) = \mathbb{E}[T_n]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[\mathrm{T}_n] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k}$$

et donc $\boxed{\mathbb{E}[\mathrm{T}_n] = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$.

10. On a

$$\mathbb{E}[\mathrm{T}_n] = \mathrm{e}^{(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{(n-1)\frac{1}{n}} \longrightarrow \mathrm{e}$$

Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\mathrm{T}_n] = \mathrm{e}}$.

Partie C

11. (a) On constate que, pour $k \geqslant 1$

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

Ainsi, pour $n \geqslant 1$ fixé, et par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = 1$.

(b) Remarquons que, de même, pour $k \geqslant 1$:

$$k\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \frac{k-1}{(k-1)!}$$

et donc $k\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = 0$ si $k=1$, $k\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \frac{1}{(k-2)!}$ si $k \geqslant 2$. Ainsi, pour $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}$$

On reconnait la série exponentielle.
Bilan : Y admet une espérance et $\mathbb{E}[\mathrm{Y}] = \mathrm{e}$.

12. On a, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant k+1$

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_n > k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^k}\frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k!}$$

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k)$. D'après le résultat précédent

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n = k) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \\
&= \frac{k-1}{k!} = \mathbb{P}(Y = k)
\end{aligned}$$

Bilan : (T_n) converge en loi vers Y.

14. En utilisant la définition de T, on a :

Programme Scilab 3 : Loi de T

```
function y=T(n)
    S=0
    y=0
    while S < n
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S=S+tirage
        y=y+1
    end
endfunction
```

15. (a) On effectue une simulation de 100000 jeux avec n boules (n étant un argument des deux fonctions) et on détermine les valeurs de T_n.
freqT renvoie un vecteur donnant la fréquence d'apparition, pour $k$ième élément, de l'entier k lorsqu'on fait cette simulation
loitheoY renvoie un vecteur donnant, pour le $k$ième élément, la probabilité $\mathbb{P}(Y = k)$.

    (b) On fait apparaitre les représentations graphiques des vecteurs précédents pour des n de plus en plus grand. On constate que la fréquence d'apparition des entiers n tend vers la probabilité théorique de Y, et donc qu'il semblerait effectivement que (T_n) converge bien en loi vers Y.