

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
 c) Montrer : $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$
 d) Établir que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1 - x)e^x - 1$$

- b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.
- c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
 Dresser le tableau des variations de f .
- d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.
- e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.
2. a) Établir : $\forall x \in [0; +\infty[, e^{2x} - 2x e^x - 1 \geq 0$
 b) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$
 c) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.
 d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
5. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. a) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[$, $0 \leq G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.
b) Montrer : $\forall x \in]-\infty; 0]$, $G(x) \leq x f(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?
2. Déterminer les valeurs propres de A .
Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
3. Déterminer une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = P D P^{-1}$ et calculer P^{-1} .

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M , matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1} M P$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Montrer : $M^2 = A \iff N^2 = D$.
2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $N D = D N$.
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.
5. En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

2. En déduire : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en **II.5**.)

3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :

$$A F = F A \iff B F = F B.$$

EXERCICE 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q .

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i , on note :

B_i l'événement "la i -ème boule tirée est blanche",

N_i l'événement "la i -ème boule tirée est noire".

1. a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}$.

- b) Vérifier : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$

- c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

2. a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$
(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

b) En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Montrer que les variables aléatoires Y , Z et $X - 1$ sont égales.

5. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.