EML

Voie E

Mardi 25 avril 2017

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < e < 2,8 \qquad 7,3 < e^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
4. (a) Étudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

PARTIE II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. (a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. Écrire un programme en Scilab qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

9. (a) Démontrer : $\quad \forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{e^x}{3}.$

   (b) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-e}{2} u_n.$

   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

PARTIE III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer cette intégrale.

11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?

12. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ converge.
    On pourra utiliser le résultat de la question 9.*a*.

PARTIE IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction F $:]1;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]1;+\infty[^2$, définie, pour tout (x,y) de $]1;+\infty[^2$, par :

$$\mathrm{F}(x,y) = f(x) + f(y) - xy.$$

13. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question 4 de la partie I.

14. (a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α,α).

    (b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α,α) ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Solution.

Partie I

1. (a) f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de deux fonctions $\mathscr{C}^2$ (exp et ln). On a alors, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$$

   (b) D'après ce qui précède, $f''(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$. Ainsi, la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par somme, on a

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$$

   Enfin, $f'(1) = 0$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le résultat précédent, et par continuité, on en déduit que $f'(x) < 0$ pour $x \in]0;1[$ et $f'(x) > 0$

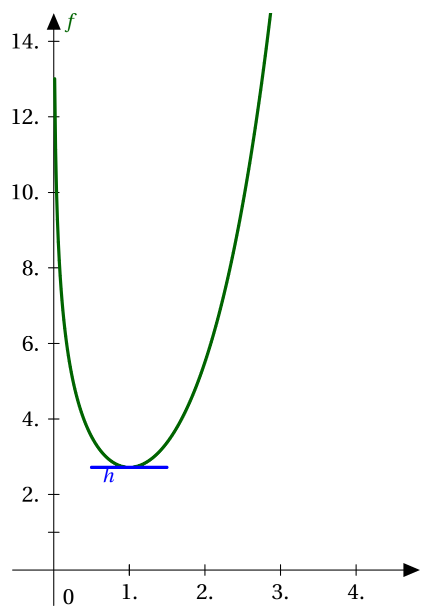
pour $x \in]1;+\infty[$. De plus, par somme, on $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et, par croissance comparée et produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x \left(1 - \mathrm{e}\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. En utilisant le travail précédent, on n'oublie pas l'asymptote verticale $x = 0$ et la tangente horizontale en $x = 1$.



4. (a) u de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par somme, et on a, pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = f''(x) - 1 = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} - 1$. Puisque, par convexité, on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ pour tout réel x, on en déduit que

$$u'(x) \geqslant x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} > 0$$

Ainsi, u est strictement croissante.

(b) On a, par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = -\infty$ et par croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) - \frac{\mathrm{e}}{x} = +\infty$$

Ainsi, u est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On a $u(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $u(x) = 0$ admet une

unique solution sur $]0;+\infty[$.
On a $u(1) = -1 < 0$ et $u(2) = \mathrm{e}^2 - \frac{e}{2} - 2$. En utilisant les inégalités données,

$$3,9 < u(2) < 4,15$$

et donc $u(2) > 0$. Par stricte croissance de u, on a bien $1 < \alpha < 2$.

Partie II

5. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "u_n existe et $u_n \geqslant 2$".
P_0 est vraie puisque $u_0 = 2$.
Supposons P_n vraie pour un certain entier n fixé. Mais alors, u_n existe et $u_n \geqslant 2$. Donc $f(u_n)$ existe (puisque $u_n > 0$) et, par stricte croissance de f sur $[1;+\infty[$:

$$f(u_n) \geqslant f(2) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2)$$

Or $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) > 7,3 - 2,8 * 0,7 = 5,34 > 2$. Donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 2$ et P_{n+1} est donc vraie.
D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n.

6. (a) g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[2;+\infty[$ par somme, et pour tout $x \geqslant 2$:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \mathrm{e}^x - \frac{e}{x} - 1$$

Or, pour $x \geqslant 2$, on a par décroissance de la fonction inverse :

$$\frac{\mathrm{e}}{x} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2} \quad \text{soit} \quad -\frac{\mathrm{e}}{x} \geqslant -\frac{\mathrm{e}}{2}$$

puis, par croissance de la fonction exponentielle :

$$g'(x) \geqslant \mathrm{e}^2 - \frac{\mathrm{e}}{2} - 1 > 0$$

Ainsi g est strictement croissante sur $[2;+\infty[$. Or $g(2) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2 > 3,34 > 0$. Ainsi, g est strictement positive sur $[2;+\infty[$.

(b) g étant strictement positive sur $[2;+\infty[$, et puisque $u_n \geqslant 2$ pour tout entier n, on en déduit que pour tout entier n, on a $g(u_n) - u_n > 0$, soit $u_{n+1} > u_n$.
Bilan : u est strictement croissante.

7. u étant croissante, soit elle converge vers une limite finie, soit elle tend vers $+\infty$. Supposons qu'elle admette une limite finie ℓ. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

soit, en utilisant la définition par récurrence de la suite u, et par continuité de f : $\ell = f(\ell)$ (théorème du point fixe), soit encore $g(\ell) = 0$. Or, d'après la question 6a, on a vu que g est strictement positive sur $[2;+\infty[$, ce qui est absurde.
Bilan : u tend vers $+\infty$.

8. Il s'agit donc d'un algorithme de seuil, puisque la suite tend vers $+\infty$

Programme Scilab 1

```
input "A=", A // On demande la valeur de A

u=2     // valeur de u
n=0     // rang de n

while u < A // tant que la valeur n'est pas dépassée
    u=exp(u)-%e*log(u)   // calcul de u(n+1)
    n=n+1             // passage à n+1
end

disp(n)
```

9. (a) Rapidement, les fonctions $h_1 : x \mapsto x - 2\ln(x)$ et $h_2 : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{3} - x$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[2;+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 2$:

$$h_1'(x) = 1 - \frac{2}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad h_2'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{3} - 1$$

Or, sur $[2;+\infty[$, $h'(1) \geqslant 0$ et $h'(2) \geqslant 0$ (on utilise les valeurs numériques données).
Bilan : pour tout $x \geqslant 2$, on a

$$2\ln(x) \leqslant x \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{\prime}$$

(b) Mais alors, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = f(u_n) = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}\ln(u_n)$. Puisque $u_n \in [2;+\infty[$, on peut utiliser les inégalités précédentes :

$$\ln(u_n) \leqslant \frac{u_n}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{u_n} \geqslant 3u_n$$

et donc $-\mathrm{e}\ln(u_n) \geqslant -\mathrm{e}\frac{u_n}{2}$ et enfin

$$u_{n+1} \geqslant 3u_n - \mathrm{e}\frac{u_n}{2} = \frac{6-\mathrm{e}}{2}u_n$$

(c) La suite u_n étant strictement positive, en utilisant l'inégalité précédente et par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ on a

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{u_n}\frac{2}{6-\mathrm{e}}$$

On peut alors montrer par récurrence que, pour tout entier n :

$$0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n \frac{1}{u_0}$$

Puisque $3,2 < 6-\mathrm{e} < 3,3$, on a $0 < \frac{2}{6-\mathrm{e}} < 1$. La série de terme général $\left(\frac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n \frac{1}{u_0}$ est donc convergente comme série géométrique.
Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge.

Partie III

10. Soit $a \in]0;1[$. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^1 f(x)dx &= \int_a^1 \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x)dx \\
&= \left[\mathrm{e}^x\right]_a^1 - \mathrm{e}\int_a^1 \ln(x)dx \\
&= \mathrm{e} - \mathrm{e}^a - \mathrm{e}\left[x\ln(x) - x\right]_a^1 \\
&= \mathrm{e} - \mathrm{e}^a - \mathrm{e}(-1 - a\ln(a) + a)
\end{aligned}$$

(pour l'intégrale en ln, on utilise soit une primitive de ln, soit une intégration par partie). Puisque $a\ln(a) \to 0$ par conséquence des croissances comparées, on en déduit que l'intégrale possède une limite quand a tend vers 0.
Bilan : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge, et

$$\int_0^1 f(x)dx = 2\mathrm{e} - 1$$

11. Remarquons que f est positive et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\mathrm{e}}{}^{x}$ (par croissance comparée). Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^x dx$ diverge, par comparaison d'intégrales de fonctions à termes positifs, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverge également.

12. Pour tout $x \geqslant 2$, on a $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x)}$. D'après la question 9$a$, on a $\ln(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{3}$ et donc $-\mathrm{e}\ln(x) \geqslant -\mathrm{e}\frac{\mathrm{e}^x}{3}$, soit $f(x) \geqslant \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\frac{\mathrm{e}^x}{3} = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{\mathrm{e}}{3}\right)$. Enfin, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$0 \leqslant \frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^x\left(1 - \frac{\mathrm{e}}{3}\right)}$$

puis

$$0 \leqslant \frac{1}{f(x)} \leqslant c\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où} \quad c = \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{e}}{3}} > 0$$

Puisque $\displaystyle\int_2^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}$ est convergence, par comparaison des intégrales de fonctions à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ converge.

Partie IV

13. F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[^2$ et on a, pour tout $(x,y) \in]1;+\infty[^2$:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x,y) = f'(x) - y \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(x,y) = f'(y) - x$$

Ainsi (x,y) est un point critique si et seulement si $f'(x) = y \quad$ et $\quad f'(y) = x$, soit

$$\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} = y \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^y - \frac{\mathrm{e}}{y} = x$$

En multipliant par x et y non nuls, c'est équivalent à

$$xe^x - e = xy \quad \text{et} \quad ye^y - e = xy$$

D'une part $xe^x = ye^y$. La fonction $x \mapsto xe^x$ étant strictement croissante sur $[1; +\infty[$, ceci donne donc $x = y$, et donc $f'(x) = x$. Ceci étant une équivalence :

Bilan : (x, y) est un point critique de F si et seulement si $x = y$ et $f'(x) - x = 0$. D'après la partie I, ceci est équivalent à $x = y = \alpha$ et donc (α, α) est l'unique point critique de F.

14. (a) En dérivant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = f''(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = f''(y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Puisque $f'(\alpha) = \alpha$, on a $e^\alpha - \frac{e}{\alpha} = \alpha$. Ainsi

$$f''(\alpha) = e^\alpha + \frac{e}{\alpha^2} = \alpha + \frac{e}{\alpha} + \frac{e}{\alpha^2}$$

Bilan : on a comme matrice hessienne en (α, α) :

$$H = \begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}$$

(b) Le déterminant de $H - \lambda I$ est $(f''(\alpha) - \lambda)^2 - 1 = (f''(\alpha) - \lambda - 1)(f''(\alpha) - \lambda + 1)$ et les valeurs propres sont donc

$$\lambda_1 = f''(\alpha) - 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = f''(\alpha) + 1$$

D'après l'écriture plus haut, on voit que $f''(\alpha) > \alpha > 1$. Donc les deux valeurs propres sont strictement positives.

Bilan F admet un minimum local au point (α, α).

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

Pour tout polynôme Pde E, on note indifféremment P ou $P(X)$.

Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \quad b(P) = P - P', \quad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'.$$

Par exemple : $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

PARTIE I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.

2. (a) Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer le rang de la matrice A.

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}\,(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

PARTIE II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.
5. (a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.
   (b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

PARTIE III : Étude de c

6. Montrer : $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?
8. (a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carré d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.
   (b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constistuée de vecteurs propres de c.

PARTIE IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall P \in E, \quad f(P) = P'$.
10. En déduire : $(BA - AB)^3 = 0$

Solution. **Partie I**

1. Remarquons que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$, et pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q) - X(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda P + Q - X\lambda P' - XQ' \\ &= \lambda(P - XP') + (Q - XQ') \\ &= \lambda a(P) + a(Q) \end{aligned}$$

a est bien une application linéaire. Enfin, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, P est de degré au plus 2, P' est de degré au plus 1 et donc XP' est de degré au plus 2. Finalement, $a(P)$ est de degré au plus 2 et a est bien un endomorphisme.

2. (a) Remarquons que $a(1) = 1$, $a(X) = X - X = 0$ et $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$. On obtient bien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Puisqu'une colonne est nulle, la matrice est au plus de rang 2. Mais comme les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont libres (car ne sont pas colinéaires), A est de rang au moins 2.

Bilan : A est de rang 2.

3. A n'étant pas de rang 3, elle n'est pas inversible. Puisque A est la matrice dans une base de l'endomorphisme a, on en déduit que a n'est pas bijectif.
   D'après la matrice A, on en déduit que
$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(X) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$$

Partie II

4.

> **Remarque.** — On nous donne b^{-1} ! Il suffit de vérifier.

Notons $d : P \mapsto P + P' + P''$. Constatons que, pour tout polynôme Q de E :
$$b \circ d(Q) = b(Q + Q' + Q'') = (Q + Q' + Q'') - (Q + Q' + Q'')' = Q + Q' + Q'' - Q' - Q'' - Q''' = Q - Q^{(3)}$$
or $Q^{(3)} = 0$ (car de degré au plus 2). Donc $b(Q + Q' + Q'') = Q$ et $b \circ d = \mathrm{id}_E$. Puisqu'on est en dimension finie, on en déduit que b est inversible, et que $b^{-1} = d$.

5. (a) Soit λ une valeur propre de b, de vecteur propre $P \neq 0$. Alors $b(P) = \lambda P$, c'est-à-dire $P - P' = \lambda P$. En notant $P = aX^2 + bX + c$, on a alors
$$aX^2 + bX + c - 2aX - b = \lambda(aX^2 + bX + c)$$
   Par identification, $a = \lambda a$ et donc $\lambda = 1$. La seule valeur propre possible est 1. Remarquons que $b(1) = 1$ donc 1 est bien valeur propre.
   Bilan : 1 est la seule valeur propre de b.

   (b) Si b est diagonalisable, sa matrice dans une certaine base est alors, puisque 1 est unique valeur propre, I_3. Dans ce cas, $b = \mathrm{id}_E$, ce qui n'est pas le cas.
   Bilan : b n'est pas diagonalisable.

Partie III

6. On a, rapidement, $c(1) = 2X$, $c(X) = 1 + X^2$ et $c(X^2) = 2X$. Ainsi, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Remarquons que C possède deux colonnes identiques. Elle n'est donc pas inversible. Puisqu'elle représente c dans une base, on en déduit que c n'est pas bijectif.

8. (a)

> **Remarque.** — On demande ici de diagonaliser C, mais expliciter de manière compliqué.

On recherche les valeurs propres de C. On résout alors le système $CX = \lambda X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ 2x + 2z = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases}$$

Après résolution, le système est équivalent à

$$\begin{cases} 2x - \lambda y + 2z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \\ (-\lambda^3 + 4\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs propres sont les racines de $-\lambda^3 + 4\lambda$, c'est-à-dire $-2, 0$ et 2 dans l'ordre croissant. D'après ce qui précède, on a également

$$E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Puisque C admet 3 valeurs propres et est de dimension 3, C est diagonalisable (ou alors, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3, la dimension de l'espace de départ). En posant alors $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors $C = RDR^{-1}$.

(b) Puisque C est diagonalisable, c est également diagonalisable, puisqu'il s'agit de la matrice de dans une base de E. D'après l'étude des valeurs propres de A, on en déduit que la base de vecteurs propres associée est

$$\mathscr{C} = (X^2 - 2X + 2, X^2 - 1, X^2 + 2X + 1)$$

Partie IV

10. Pour tout P de E, on a $(XP')' = P' + XP''$ par produit. Donc :

$$b \circ a(P) = b(P - XP') = (P - XP') - (P - XP')' = P - XP' - P' + (P' + XP'') = P - XP' + XP''$$

et

$$a \circ b(P) = a(P - P') = (P - P') - X(P - P')' = P - P' - X(P' - P'') = P - P' - XP' + XP''$$

et donc

$$f(P) = P - XP' + XP'' - (P - P' - XP' + XP'') = P'$$

11. D'après ce qui précède, pour tout $P \in E$, $f(P) = P'$. Mais alors, $f^3(P) = f(f(f(P))) = f(f(P')) = f(P'') = P''' = 0$ pour tout polynôme P. Ainsi, $f^3 = 0_E$. Or, la matrice de f dans la base canonique est $BA - AB$, puisque A et B sont les matrices respectives de a et b dans la base canonique. Ainsi, puisque $f^3 = 0$, on a bien $(BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :
B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage".

PARTIE I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

Programme Scilab 2

```
function s = EML(n)
 b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
 r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
 s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
 for k = 1:n
  x = rand()
  if ... then
    ...
  else
    ...
  end
 end
endfunction
```

2. On exécute le programme suivant :

Programme Scilab 3

```
n = 10
m = 0
for i = 1:1000
 m = m+EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient : `6.657`. Comment interpréter ce résultat ?

PARTIE II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au range d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

(b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? une variance ?

PARTIE III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoire X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
7. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Calculer : $\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n)$.
   (b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k} \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n)$,
   puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.
9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \frac{2n}{3}$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.
    (b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.
    (c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

PARTIE IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad \forall x < 0, \quad \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0, \quad$ et : $\quad \forall x > 1, \quad \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.
12. Soit $x \in [0; 1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)},$$

    où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Solution. **Partie I**

1. La probabilité d'avoir une boule bleue, si on a b bleue et r rouges, est de $\frac{b}{b+r}$. Il suffit ainsi de comparer le nombre aléatoire tiré à la valeur de *rand*.

Programme Scilab 4

```
function s = EML(n)
 b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
 r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
 s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n
tirages
 for k = 1:n
  x = rand()
  if x<b/(r+b) then // cas où on tombe sur une boule bleue
    b=b+1
  else              // cas où on tombe sur une boule rouge
    s=s+1
    r=r+1
  end
 end
endfunction
```

2. On effectue 1000 tirages de EML(10), on ajoute tous les résultats dans la variable m, et on renvoie $m/1000$: on renvoie donc la moyenne, sur 1000 tirages, du nombre de boules rouges obtenues sur 10 tirages.

Partie II

3. (a) Pour obtenir $[Y = n]$, il faut n'obtenir que des boules rouges sur les $n-1$ premiers tirages, puis la boule bleue au n-ième tirage. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=n]) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap B_n) \\ &= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\cdots\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots R_{n-2}}(R_{n-1})\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots R_{n-1}}(B_n) \quad \text{probabilités composées}\end{aligned}$$

Puisqu'on ajoute une boule de la couleur tirée précédemment, au k-ième tirage, on a $k-1+3 = k+2$ boules, et on a

$$\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1})(R_k) = \frac{k+1}{k+2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(R_n) = \frac{1}{n+2}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=n]) &= \frac{2}{3}\frac{3}{4}\cdots\frac{n-2}{n}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \quad \text{par télescopage}\end{aligned}$$

(b) Remarquons que, si elle existe, on a

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}([Y=n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$$

Or $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n}$ étant divergente (série harmonique), par équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}([Y=n])$ diverge également.

Bilan : Y n'admet pas d'espérance, et donc pas de variance non plus.

4. Par un même raisonnement que précédemment, on a, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=n]) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap R_n) \\
&= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\cdots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots B_{n-2}}(B_{n-1})\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots B_{n-1}}(R_n) \quad \text{probabilités composées} \\
&= \frac{1}{3}\frac{2}{4}\cdots\frac{n-1}{n+1}\frac{2}{n+2} \\
&= \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{par télescopage}
\end{aligned}$$

Remarquons que, cette fois-ci, $n\mathbb{P}(Z=n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ qui est le terme générale d'une série de Riemann convergente. Par équivalence des séries à terme positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}([Z=n])$ converge et Z admet une espérance.

Enfin, Z n'admet pas de moment d'ordre 2. En effet, $n^2\mathbb{P}(Z=n) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ qui, comme précédemment, ne converge pas.

Bilan : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z=n]) = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$, Z admet une espérance mais pas de variance.

Partie III

5. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

6. On a $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{3}$. Son espérance vaut

$$\mathbb{E}(X_1) = 1\frac{2}{3} + 0\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

et sa variance, par la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 1^2\frac{2}{3} + 0^2\frac{1}{3} - (\mathbb{E}(X_1))^2 = \frac{2}{9}$$

7. (a) En utilisant la définition des tirages :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

de même, $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{6}$.

Bilan :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{6}$$

(b) On a alors

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{2}{3}$$

(c) Remarquons que

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{9}$$

Ainsi, X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

8. (a) D'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n) = \mathbb{P}(R_1) \cdots \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k)\mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(B_{k+1}) \cdots \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

En utilisant la définition du tirage, et en faisant attention aux nombres de boules :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n) &= \frac{2}{3}\frac{3}{4} \cdots \frac{k+1}{k+2}\frac{1}{k+3}\frac{2}{k+4} \cdots \frac{n-k}{n+2} \\ &= 2\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \end{aligned}$$

(b) Remarquons que $[S_n = k]$ est composé de tous les événements composés de k tirages rouges et $n-k$ tirages bleus. Or, en réalité, l'ordre du tirage des boules bleues et des boules rouges n'importe pas. Il y a $\binom{n}{k}$ façon de tirer k boules rouges et $n-k$ boules bleues. Ainsi

$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k}\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n)$$

On a alors, en utilisant la formule précédente :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

9. S_n étant une variable aléatoire finie (puisqu'elle prend des valeurs dans $[\![0; n]\!]$) elle admet une espé-

rance, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([S_n = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} k^2 + k \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}2\right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} n(n+1)\frac{2n+4}{6} \\
&= \frac{2n}{n+2}\frac{n+2}{3} = \frac{2n}{3}
\end{aligned}$$

10. (a) Si $S_n = k$, alors on a effectué n tirages et obtenue k boules rouges. On est dans une situation où on a donc $n+3$ boules, donc $k+2$ boules rouges. Ainsi

$$\mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'événements $([S_n = k]_{0\leqslant k\leqslant n}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k])\mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k])\frac{k+2}{n+3} \\
&= \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n = k) + 2\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k)\right) \\
&= \frac{1}{n+3}(\mathbb{E}(S_n) + 2)
\end{aligned}$$

(c) Ainsi, en utilisant les résultats précédents :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{n+3}\left(\frac{2n}{3} + 2\right) = \frac{1}{n+3}\frac{2n+6}{3} = \frac{2}{3}$$

et donc $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0] = \frac{1}{3}$.
Bilan : les variables aléatoires X_n ont toutes la même loi.

Partie IV

1. Si $x < 0$, l'événement $[T_n \leqslant x]$ est vide, puisque $S_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$. Ainsi $\mathbb{P}(T_n \leqslant x) = 0$.
De même, pour $x > 1$, l'événement $[T_n \leqslant x]$ est Ω tout entier, puisque $T_n(\Omega) \subset [0; 1]$ (car $T_n = \frac{S_n}{n}$).
Donc $\mathbb{P}(T_n \leqslant n) = 1$.

2. Soit $x \in [0; 1]$.

$$[T_n \leqslant x] = [S_n \leqslant nx]$$

Puisque S_n est à valeur entière, on en déduit que

$$[T_n \leqslant x] = [S_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]$$

soit, en utilisant la valeur de $\mathbb{P}(S_n = k)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) &= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{\lfloor nx \rfloor (\lfloor nx \rfloor + 1)}{2} + \lfloor nx \rfloor + 1 \right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{2}
\end{aligned}$$

3. Si $x < 0$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0 \to 0$. Si $x > 1$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1 \to 1$. Enfin, si $x \in [0;1]$, on

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} x^2$$

La fonction $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est une fonction continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Bilan : D'après ce qui précède, la suite (T_n) converge en loi vers la variable aléatoire T, de fonction de répartition F et de densité (par exemple, celle-ci n'est pas unique) : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$