EML

Voie E

Mardi 25 avril 2017

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
4. (a) Étudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

PARTIE II : Étude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. (a) Étudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. Écrire un programme en Scilab qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

9. (a) Démontrer : $\forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{e^x}{3}$.

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-e}{2} u_n$.

   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

PARTIE III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge et calculer cette intégrale.
11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?
12. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ converge.
    On pourra utiliser le résultat de la question 9.*a*.

PARTIE IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $\mathrm{F} :]1;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]1;+\infty[^2$, définie, pour tout (x, y) de $]1;+\infty[^2$, par :

$$\mathrm{F}(x, y) = f(x) + f(y) - xy.$$

13. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α, α), le réel α ayant été défini à la question 4 de la partie I.
14. (a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α, α).

    (b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α, α) ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Exercice 2

On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ la base canonique de E.
Pour tout polynôme Pde E, on note indifféremment P ou P(X).
Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $\mathrm{P} = \alpha + \beta\mathrm{X} + \gamma\mathrm{X}^2$ est le polynôme $\mathrm{P}' = \beta + 2\gamma\mathrm{X}$, et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $\mathrm{P}'' = 2\gamma$.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{X}\mathrm{P}', \quad b(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}', \quad c(\mathrm{P}) = 2\mathrm{X}\mathrm{P} - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'.$$

Par exemple : $a(\mathrm{X}^2) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}(2\mathrm{X}) = -\mathrm{X}^2$.
Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

PARTIE I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.
2. (a) Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer le rang de la matrice A.

3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}\,(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

PARTIE II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $b^{-1}(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q} + \mathrm{Q}' + \mathrm{Q}''$.
5. (a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

   (b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

PARTIE III : Étude de c

6. Montrer : $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?
8. (a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre trois, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carré d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $\mathrm{C} = \mathrm{RDR}^{-1}$.

   (b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constistuée de vecteurs propres de c.

PARTIE IV : Étude de f

9. Montrer : $\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$.
10. En déduire : $(\mathrm{BA} - \mathrm{AB})^3 = 0$

Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :
B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage".

PARTIE I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

Programme Scilab 1

```
function s = EML(n)
 b = 1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
 r = 2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
 s = 0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
 for k = 1:n
  x = rand()
  if ... then
    ...
  else
    ...
  end
 end
endfunction
```

2. On exécute le programme suivant :

Programme Scilab 2

```
n = 10
m = 0
for i = 1:1000
 m = m+EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient : `6.657`. Comment interpréter ce résultat ?

PARTIE II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au range d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
   (b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? une variance ?

PARTIE III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoire X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
7. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Calculer : $\quad \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n)$.
   (b) Justifier : $\quad \mathbb{P}([S_n = k]) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n)$,
   puis en déduire : $\quad \mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.
9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\quad \mathbb{E}(S_n) = \frac{2n}{3}$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Montrer : $\quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.
    (b) En déduire : $\quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.
    (c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

PARTIE IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad \forall x < 0, \quad \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0, \quad$ et : $\quad \forall x > 1, \quad \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.
12. Soit $x \in [0; 1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)},$$

    où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.