Exercice 14 (ECRICOME 2003)

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x-2y+3z \\ x+2z \\ 2z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

1. Justifier que f est une application linéaire et déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad f(X) = AX$.
2. Montrer que les ensembles $E_1 = \{x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(x) = x\}$ et $E_2 = \{x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(x) = 2x\}$ sont des espaces vectoriels.
3. Justifier que chacun de ces espaces possède une base constituée d'un unique vecteur, que l'on notera e_1 pour E_1 et e_2 pour E_2.
4. Déterminer un vecteur e_3 tel que $f(e_3) = 2e_3 + e_2$.
5. Justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
6. Si l'on note $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$

Correction

1. On vérifie facilement que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (X,\ Y) \in \mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R}),\quad f(\lambda X + Y) = \lambda f(X) + f(Y)$$

   et que $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   $f(X) = X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+3z = x \\ x+2z = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = x \end{cases}$.

   On a $E_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$.

   $f(X) = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+3z = 2x \\ x+2z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z = 0 \\ x-2y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases}$.

   On a $E_2 = \{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ donc E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$.

3. On a $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc (e_1) est une base de E_1 et (e_2) est une base de E_2.

4. Si on note $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a $f(e_3) = 2e_3 + e_2 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+3z = 2x+2 \\ x+2z = 2y+1 \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z = 1 \\ x-2y+2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} z = 1 \\ x-2y+2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 2y-1 \end{cases}$.

Tout vecteur e_3 de la forme $e_3 = \begin{pmatrix} 2y-1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On peut donc choisir $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Comme la famille $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ a trois éléments et $\dim \mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R}) = 3$, il suffit de monter que $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est libre.

   En effet, $\forall (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$, $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$

   Ceci montre que la famille $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est libre, donc elle est une base de $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$.

6. (a) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On procède par les opérations élémentaires sur les matrices :

   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Aucun coefficient de la diagonale n'est nul, donc P est inversible)

   $\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) On a $T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.