Correction du DS n° 1

Exercice 1. *1. (a)* $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$ *ou* $x^2 < 0$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1$ *et* $x^2 \notin [2\,;+\infty[$.

2. *(a)* $\sqrt{x^2+1} < x+1 \Rightarrow 0 < x+1 \Leftrightarrow x \in]-1\,;+\infty[$.

Pour $x \in]-1\,;+\infty[$ *on a :*

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} < x+1 &\Leftrightarrow x^2+1 < (x+1)^2 \text{ car la foncion carrée est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[\\ &\Leftrightarrow x^2+1 < x^2+2x+1\\ &\Leftrightarrow 0 < 2x\\ &\Leftrightarrow 0 < x\end{aligned}$$

Donc $S =]0\,;+\infty[$

(b)

$$\begin{aligned}|3x-1| \leqslant |x-3| &\Leftrightarrow |3x-1|^2 \leqslant |x-3|^2\\ &\Leftrightarrow 9x^2-6x+1 < x^2-6x+9\\ &\Leftrightarrow 8x^2-8 \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow x^2-1 \leqslant 0\end{aligned}$$

En utilisant un tableau de signes on obtient $S = [-1\,;1]$.

(c) *On a* $|x^2-1| < 2x^2-3x+1 \Leftrightarrow f(x) > 0$ *où* $f(x) = 2x^2-3x+1-|x^2-1|$.

Sur $]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[,\ |x^2-1| = x^2-1$ *et* $f(x) = x^2-3x+2$.

$\Delta = 1,\ x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ *et* $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. *En utilisant un tabeau de signes et en tenant compte du fait que* $x \in]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$ *on a* $x \in]-\infty\,;-1] \cup]2\,;+\infty[$

Sur $]-1\,;1[,\ |x^2-1| = -x^2+1$ *et* $f(x) = 3x^2-3x = 3x(x-1)$. *En utilisant un tabeau de signes et en tenant compte du fait que* $x \in]-1\,;1[$, *on a* $S_2 =]-1\,;0[$.

On a $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$

3.

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{2}(3-2\sqrt{3})}{3(3-2\sqrt{3})}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= |3-2\sqrt{2}|\\ &= 3-2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

car $3^2 = 9 > (2\sqrt{2})^2 = 8$

4. *Montrons par récurrence que pour tout entier naturel* $n \geqslant 3$ *on a* $4^n \geqslant (2n+1)^2$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ *: « $4^n \geqslant (2n+1)^2$ ».*

On a $4^3 = 64$ *et* $(2\times 3+1)^2 = 49$ *donc* $\mathcal{P}(3)$ *est vraie.*

Soit $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 3$, *on suppose que* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie et on veut démontrer que* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie, c'est à dire que* $4^{n+1} \geqslant (2n+3)^2$.

En effet, $4^{n+1} = 4\times 4^n \geqslant 4(2n+1)^2$. *Or* $4(2n+1)^2-(2n+3)^2 = (4n+2)^2-(2n+3)^2 = (2n-1)(6n+5)$ *qui est bien positif dès que* $n \geqslant 3$ *car* $2n-1 > 0$ *si* $n \geqslant 3$ *et* $6n+5 > 0$*), c'est à dire,* $4(2n+1)^2 > (2n+3)^2$ *. D'où* $4^{n+1} \geqslant (2n+3)^2$. *Donc* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie.*

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 3$, $4^n \geqslant (2n+1)^2$.

5. *Soit* $n > 1$ *un entier naturel. Calculer :*

(a) $S = \sum_{k=2}^{n} \frac{3^{2k}}{5^k}, \quad T = \sum_{k=2}^{n} \left((2k+1)(k^2-1)\right), \quad U = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+2k+1}\right)$

$$S = \sum_{k=2}^{n} \frac{3^{2k}}{5^k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{9^k}{5^k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{9}{5}\right)^k = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{9}{5}\right)^{k-2} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{9}{5}\right)^j = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{n-1} - 1}{\frac{9}{5} - 1}$$

Donc

$$S = \frac{81}{20}\left(\left(\frac{9}{5}\right)^{n-1} - 1\right)$$

$$T = \sum_{k=2}^{n} \left((2k+1)(k^2-1)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((2k+1)(k^2-1)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(2k^3+k^2-2k-1\right)$$

$$T = 2\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) - n = \frac{n(3n^3+8n^2-11)}{6}.$$

Remarque : *On peut montrer que* $T = \frac{n(n-1)(3n^2+11n^2+11)}{6}$.

$$U = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+2k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$ *(somme télescopique).*

(b)
```
n=input ( 'Donner une valeur non nulle de n : ' )
S=0
  for k=1 :n
    S=S+(2*k+%e)/(sqrt(k^ 2+1+% pi)
  end
disp (S)
```