Exercice 1

Calculer l'inverse de A s'il existe :

1) $A=\begin{pmatrix}5&9\\1&2\end{pmatrix}$

2)$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

Réponse

1) $A=\begin{pmatrix}5&9\\1&2\end{pmatrix}$ est inversible car $\Delta=5\times2-1\times9=1\neq0$ et on a $A=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}2&-9\\-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-9\\-1&5\end{pmatrix}$

2)

$$(A\mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$
$$L_1\leftrightarrow L_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

Donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3) Avec la méthode de Gauss-Jordan

$$(A\mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

La $1^{\text{ère}}$ ligne commence par un 0 , donc il faut l' échanger aver las $2^{\text{ème}}$ ou la $3^{\text{ème}}$. On l'échange par exemple avec L_2

$$L_1\leftrightarrow L_2\quad\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$
$$L_3\leftrightarrow L_3-L_1-L_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

Donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

Exercice 2

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}$ avec $a\neq0$ et $b\neq0$.

2) Cas particulier : Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{mx}-1}{e^{nx}-1},\quad(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

Réponse

1) Ona : $\dfrac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}=\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\dfrac{ax}{bx}\times\dfrac{bx}{e^{bx}-1}=\dfrac{a}{b}\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\times\dfrac{bx}{e^{bx}-1}$.

2) On a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{bx}-1}{bx}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^{X}-1}{X}$. Or $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^{X}-1}{X}=1$ d' après le cours.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}=\dfrac{a}{b}$.

Remarque : En $2^{\text{ème}}$ année, c' est plus simple, on utilisera des équivalents.

2) Cas particulier :

Il faut se rappeler que $X^n-1=(X-1)\left(1+X+\cdots+X^{n-1}\right)$ et que $e^{nx}=(e^x)^n$

On écrit $e^{mx}-1=(e^x)^m-1=(e^x-1)\left(1+e^x+\cdots+e^{(m-1)x}\right)$ et $e^{nx}-1=(e^x)^n-1=(e^x-1)\left(1+e^x+\cdots+e^{(n-1)x}\right)$

D'où $\dfrac{e^{mx}-1}{e^{nx}-1}=\dfrac{1+e^x+\cdots+e^{(m-1)x}}{1+e^x+\cdots+e^{(n-1)x}}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{e^{nx}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^x+\cdots+e^{(m-1)x}}{1+e^x+\cdots+e^{(n-1)x}}=\dfrac{m}{n}$

Remarque : On peut aussi faire le même raisonnement qu'en 1).

Exercice 3

Calculer $f'(x)$ lorsque :

1) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

Réponse

1) $f(x)$ existe si, et seulement si, $\dfrac{x+1}{x-1}>0$ car ln est définie sun $]0;+\infty[$.

Avec un tableau de signes, on trouve $\dfrac{x+1}{x-1}>0\Leftrightarrow x\in\Big]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

$f(x)$ est de la forme : $f(x)=\ln(u(x))$ et d'après le cours $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Ici, $u(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. D'où $u'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$ et $u'(x)=\dfrac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}\times\dfrac{x-1}{x+1}=-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

Attention : Ne pas écrire, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ puis $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$ car pour $x=-2$ par exemple, $\ln(x+1)$ n'est pas défini et pourtant $f(-2)$ est défini.

2) On écrit $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=u^{-1/2}$ où $u=x^2+1$. On obtient $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\dfrac{1}{2}u'u^{-3/2}=-\dfrac{1}{2}2x(x^2+1)^{-3/2}$.

Soit $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.