

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Déterminer la matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$
(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.
En déduire l'expression de A^n en fonction de n .

2. Soient (x_n) et (y_n) deux suites définies par :
$$\begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 5y_n \\ x_0 = y_0 = 1. \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

- (a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$.
(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$
(c) En déduire l'expression de x_n et y_n en fonction de n .
3. (a) Déterminer toutes, les matrices M telles que $MD = DM$.
(b) En déduire, l'expression des matrices N telles que $NA = AN$. (Indication : on pose $N = PMP^{-1}$ où M vérifie : $MD = DM$).