Exercice 1.

Vrai ou faux ?

1. *Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.*
2. *Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.*
3. *Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.*
4. *Si (u_n) est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > v_n$, alors (v_n) est croissante.*
5. *Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.*
6. *Si $(|un|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.*

Exercice 2.

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$ • $u_n = (-n+2)e^{-n}$ • $u_n = 2^n - e^{2n} + 1$
- $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$ • $u_n = \ln n + e^{-3n}$ • $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + 3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$
- $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$ • $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$ • $u_n = e^{-\frac{1}{3n}} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

Exercice 3.

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$

1. *Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.*
2. *Déterminer la monotonie de la suite (u_n).*
3. *Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 > 2n + u_0^2$. En déduire la limite de la suite.*

Exercice 4.

On définit une suite (u_n) par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ (je rappelle que par convention $0! = 1$).

Montrer à l'aide d'un encadrement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$.

Exercice 5.

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

1. *Montrer que la suite est croissante.*
2. *Montrer que, $\forall x > 0,\ \dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.*
3. *En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.*
4. *Montrer que la suite (u_n) est convergente.*
5. *Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?*

Exercice 6.

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $un = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 7.

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. *Vérifier que ces deux suites sont bien définies.*
2. *Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).*
3. *Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.*
4. *En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.*

5. *Écrire un programme en Scilab permettant de calculer une valeur approchée de cette limite à ε près.*

Exercice 8.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \neq 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{u_n-1}$.

1. *Montrer que la suite est bien définie.*
2. *Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$. .*
3. *Étudier également le signe de $f(x) - x$.*
4. *On suppose $a > 1$. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall n > 1,\ u_n \geqslant 2(1+\sqrt{2})$, puis que la suite est croissante. En déduire sa limite éventuelle.*
5. *Étudier de même la convergence de la suite quand $a < 1$.*