Exercice 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + n^2 - 1$. Déterminons trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit géométrique.

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2u_n + n^2 - 1 + an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2u_n + (1+a)n^2 + (2a+b)n + a + b + c - 1$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = 2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $1 + a = 2a,\ 2a + b = 2beta + b + c - 1 = 2c$, ce qui donne successivement $a = 1$

, puis $b = 2$, et enfin $c = 2$.

Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 4$. Conclusion :

$v_n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = 2^{n+2} - n^2 - 2n - 2$.

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 7u_n^2$.

1. *Par récurrence :*
   Initialisation : On a $u_0 = 3 > 0$.
   Hérédité : Supposons que $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = 7u_n^2 > 0$.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. *On a $\ln u_{n+1} = 2 \ln u_n + \ln 7$. La suite $\ln u_n$ est donc arithmético-géométrique. La suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n + \ln 7$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln u_0 + \ln 7 = \ln 21$. Donc $v_n = 2^n \ln 21$ et $\ln u_n = 2^n \ln 21 - \ln 7$.*
3. *En déduire l'expression de u_n en fonction de n. On a $\ln u_n = 2^n \ln 21 - \ln 7 = \ln \dfrac{21^{2^n}}{7}$, donc $u_n = \dfrac{21^{2^n}}{7}$.*

Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n^3$. Exprimons u_n en fonction de n.

On procède comme dans l'exercice 2 :

1. *on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.*
   Initialisation : On a $u_0 = 2 > 0$.
   Hérédité : Supposons que $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = 2u_n^3 > 0$.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. *On a $\ln u_{n+1} = 3 \ln u_n + \ln 2$. La suite $\ln u_n$ est donc arithmético-géométrique. La suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n + \ln 2$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \ln u_0 + \ln 2 = 2 \ln 2$. Donc $v_n = 3^n 2 \ln 2$ et $\ln u_n = 3^n 2 \ln 2 - \ln 2$.*
3. *En déduire l'expression de u_n en fonction de n. On a $\ln u_n = 3^n 2 \ln 2 - 2 \ln 2 = \ln \dfrac{2^{3^n 2}}{4}$, donc*

$$u_n = \frac{2^{3^n 2}}{4} = 2^{3^n 2 - 2}.$$

Exercice 4.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 16$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. Exprimons u_n en fonction de n. On procède comme dans l'exercice 2.

1. *Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.*
   Initialisation : On a $u_0 = 16 > 0$.
   Hérédité : Supposons que $u_n > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} > 0$.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. *On a $\ln u_{n+1} = \dfrac{\ln u_n}{2} + \ln 2$. La suite $\ln u_n$ est donc arithmético-géométrique. La suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n - 2 \ln 2$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln u_0 - 2 \ln 2 = 2 \ln 2$. Donc $v_n = \dfrac{1}{2^n} 2 \ln 2 = \dfrac{\ln 2}{2^{n-1}}$ et $\ln u_n = \dfrac{\ln 2}{2^{n-1}} + 2 \ln 2$.*

3. *En déduire l'expression de u_n en fonction de n. On a* $\ln u_n = \dfrac{\ln 2}{2^{n-1}} + 2\ln 2 = \ln(2^{\frac{1}{2^{n-1}}}4) = \ln 2^{\frac{1}{2^{n-1}}+2}$, *donc* $u_n = 2^{\frac{1}{2^{n-1}}+2}$.

Exercice 5.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Montrons que la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n$ est une suite arithmético-géométrique. On a $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3}v_n + \dfrac{1}{3}$. Donc v_n est une suite arithmético-géométrique.

On pose $w_n = v_n - 1$. Alors (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. Donc $w_n = \dfrac{2^n}{3^n}w_0 = \dfrac{2^n}{3^n}$ et $v_n = \dfrac{2^n}{3^n} + 1$.

Comme $u_n = 3^n v_n$, on a $u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 6. *Voir cours*

Exercice 7.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$.

1. *Récurrence.*
2. *On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_n = ln(u_n - 2)$. (v_n) est bien définie car $u_n > 2$.*
3. *On a $v_{n+1} = -v_n$. Donc (v_n) est une suite géométrique de raison -1 avec $v_0 = \ln 2$.*
   Donc $v_n = (-1)^n \ln 2$. Comme $u_n = \mathrm{e}^{v_n} + 2$, on a $u_n = 2^{(-1)^n}$
4. *En déduire la valeur de u_n.*

Exercice 8.

Adapter la méthode utilisée dans l'exercice précédent pour déterminer la forme explicite de la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 6u_n + 12$. (Indication : $x^2 - 6x + 12 = (x-3)^2 + 3$)

Exercice 9.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. Déterminons la valeur de u_n.

Indication :

On a $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 2u_{n-1} + \cdots + 2u_0 = u_{n+1} + u_n + (u_n + 2u_{n-1} + \cdots + 2u_0)$, donc

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + u_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n$$

car $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$,

Exercice 10.

On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la récurrence non linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3.$$

1. *Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.*
2. *Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est alors d'un type bien connu, et en déduire la valeur de z_n puis celle de u_n (en fonction des premières valeurs de la suite).*

Exercice 11. *Adapter la méthode utilisée dans l'exercice précédent pour déterminer la forme explicite des suites vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2\ 017.$$