EML Eco 2008

EXERCICE 1

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$..

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de f.
5. Montrer que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$
   (a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.
   (b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.
   (c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t}$.
   (d) Tracer Γ

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1\ ; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1\ ; +\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1\ ; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]1\ ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et } G''(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{aligned}$$

   À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.
2. (a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1\ ; +\infty[$.
   (b) Vérifier : $G'(2) > 0$.
   (c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1\ ; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$

EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $(-1 \quad 1 \quad 1)$, telle que $A = P\ D\ P^{-1}$, et calculer P^{-1}.
3. Calculer la matrice $C = P^{-1}B\ P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E.
2. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
3. Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}M\ P$, où P est définie en **I.2**.
   (a) Montrer : $M \in \ker(f) \iff DN = NC$.
   (b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4. (a) En déduire la dimension de $\ker(f)$, puis la dimension de $Im(f)$.
   (b) Donner au moins un élément non nul de $\ker(f)$ et donner au moins un élément non nul de $Im(f)$.

EXERCICE 3

Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}$$

   (a) Montrer que h est une bijection de $[0;1]$ sur $[0;1]$ et, pour tout $y \in [0;1]$, exprimer $h^{-1}(y)$.

   (b) Déterminer deux réels α et β vérifiant : $\forall x \in [0;1], \quad h(x) = \alpha + \frac{\beta}{2-x}$

   (c) Calculer $\int_0^1 h(x)\,dx$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$

   (a) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

   (b) Pour tout réel y de $[0;1]$ déterminer la probabilité de l'événement $\left(\frac{X}{2-X} \leqslant y\right)$

   (c) Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X}{2-X}$ admet une densité et déterminer une densité de Y.

   (d) Montrer que Y admet une espérance $E(Y)$ et déterminer -

Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note $I_1,\ I_2 \cdots, I_n$. Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire T_k de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leqslant t)$, $(T_2 \leqslant t)$, $\cdots (T_n \leqslant t)$, sont indépendants.

1. Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leqslant t)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.
   On note $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

   (a) Que modélise la variable aléatoire S_t ?

   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_t.

2. Soit R_1 la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

   (a) Soit un réel t appartenant à $[0;1]$. Comparer l'événement $(R_1 > t)$ et l'événement $(S_t = 0)$

   (b) Montrer que la variable aléatoire R_1 admet une densité et en déterminer une.

3. Soit R_2 la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.
   Montrer que la variable aléatoire R_2 admet une densité et en déterminer une.