Révision
Option économique

–

Exercice 1 (EDHEC 2005)

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille(J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)\, I$ où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3 et J_4.
   (b) Vérifier que la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) Justifier que f est diagonalisable.
3. (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   (b) Écrire la matrice D de f dans cette base.
   (c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = P\, D\, P^{-1}$
4. (a) Déterminer la matrice P^{-1}.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = P\, D^n P^{-1}$
   (c) En déduire explicitement la matrice A^n.

Exercice 3 ((EDHEC 2005)

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} a\,(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \notin [0,1[\end{cases}$
   (a) Pour tout x de $[0,1[$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.
   (c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

   On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition.
2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3. (a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x
   (b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.
4. (a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$.

(b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.

(c) Exprimer X en fonction de Y, puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a.

(d) Montrer que la variable aléatoire e e^{-2Y} possède une espérance et que $E\left(e^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$

En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

Problème (EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Donner la loi de X_1.
   (c) En déduire $\mathrm{P}(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [[0, n]]$
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - p$
3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\},\ \mathrm{P}(X_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(X_n = k-1)$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\},\ \mathrm{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) = 1$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$
   (b) En déduire que $E(X_n) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.
5. (a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ E\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E(X_n) + 1\right)$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$
   Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$
   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.
   (d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$

PROBLÈME (ESCP 2005)

Partie I

Dans cette partie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$, $v_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k$, $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite s, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite s.
   (c) En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.
2. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$, est convergente.
3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.
4. (a) établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, l'égalité : $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \dfrac{1}{1+t} - (-1)^n\dfrac{t^n}{1+t}$.
   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^\times$: $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n\int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t}dt$
   (c) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

Partie II

Deux amis, Pierre et Paul jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel n ; chaque sollicitation constitue une manche de ce jeu et :

- ⋆ si cet entier n est impair, Paul donne n Euros à Pierre : on considère que Pierre gagne et que son gain est égal à + n ;
- ⋆ si cet entier n est pair, Pierre donne n Euros à Paul : on considère que Pierre perd et que son gain est égal à - n ;
- ⋆ si n= 0, on considère que Pierre perd, et que son gain est égal à 0.

On considère un espace probabilisé $(\Omega; A; P)$ qui modélise le jeu.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre obtenu lors d'une sollicitation.

1. On suppose, jusqu'à la fin de la question 5, que la loi de probabilité de X est définie par
$$P(X=0)=0, \quad \text{et pour tout } n>1 : P(X=n) = \frac{\alpha}{n(n+1)}$$
   où α est un réel strictement positif.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
   (b) En déduire la valeur de α.
2. (a) Calculer la probabilité que Pierre gagne une manche quelconque.
   (b) Calculer l'espérance du gain de Pierre pour une manche.
3. Pierre et Paul effectuent deux manches consécutives. On suppose que les résultats de ces deux manches sont indépendants. On note Y le gain cumulé de Pierre à l'issue de ces deux manches.
   Calculer $P(Y=0)$, $P(Y=2)$ et $P(Y=-2)$.
4. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{1-x^2}dx$ est convergente.

(b) établir, pour tout réel x de $]0;1[$ et pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, l'égalité :

$$\frac{\ln(x)}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln(x) + \frac{x^{2n+2}\ln(x)}{1-x^{\ 2}}$$

(c) Montrer que pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_0^1 x^{2k}\ln(x)dx$ converge.

Exprimer en fonction de k la valeur de cette intégrale.

(d) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2\ln(x)}{1-x^2}$, définie sur $]0;1[$, est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

En déduire qu'elle est bornée sur $[0;1]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{x^{2n+2}\ln(x)}{1-x^2}dx$.

(e) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx = -\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

On admet que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}dx$.

5. (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, on ait l'égalité suivante :

$$\frac{1}{n(n+1)^2(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+1)^2} + \frac{c}{n+2}$$

(b) Calculer $P(Y=1)$.

6. On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, ($\lambda > 0$).

(a) Calculer, en fonction de λ, la probabilité que Pierre gagne une manche.

(b) Comparer la probabilité que Pierre gagne une manche à celle qu'il perde une manche.

(c) Calculer l'espérance du gain de Pierre pour une manche.