

# EML 2007 voie Eco

## Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, sans calcul, que  $A$  est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible et symétrique  $P$ , de première ligne  $(1 \ 1 \ 1)$  et de deuxième ligne  $(1 \ -1 \ 0)$ , telles que  $A = P D P^{-1}$ .  
Calculer  $P^{-1}$ .
3. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la matrice  $A^n$  par ses éléments.
4. Soient  $u_0, v_0, w_0$  trois nombres réels positifs ou nuls tels que  $u_0 + v_0 + w_0 = 1$ .

On note  $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$  la matrice colonne définie par la relation de récurrence :  $X_n = A X_{n-1}$ .

(a) Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $X_n = A^n X_0$

(b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \frac{1}{3} + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \frac{1}{3} + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

(c) Déterminer les limites respectives  $u, v, w$  de  $u_n, v_n, w_n$  lorsque le nombre entier  $n$  tend vers l'infini.

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$

(d) Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $d_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

(e) Déterminer un entier naturel  $n$  tel que :  $d_n \leq 10^{-2}$

## Exercice 2

### Préliminaire

On donne :  $0,69 < \ln 2 < 0,70$ .

On considère l'application :

$$g : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 + \ln x$$

1. Montrer que  $g$  est continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$
2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ , admet une solution et une seule.

On note  $\alpha$  l'unique solution de cette équation.

3. Montrer :  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

**Partie A**

On note  $I = [\frac{1}{2}, 1]$  et on considère l'application :

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$$

1. (a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .  
 (b) Montrer :  $\frac{1}{2} < f(\frac{1}{2}) < f(1) < 1$ .  
 (c) En déduire :  $\forall x \in I, f(x) \in I$ .
2. On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
 (a) Calculer  $u_1$   
 (b) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$   
 (c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.  
 (d) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite est le réel  $\alpha$ .

**EXERCICE 3**

1. On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire  $X$  admettant  $f$  pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de la façon suivante :  
 \* l'événement  $(Y = 0)$  est égal à l'événement  $(X < 1)$   
 \* pour tout nombre entier strictement positif  $n$ , l'événement  $(Y = n)$  est égal à l'événement  $(n \leq X < n + 1)$ .  
 (a) Montrer, pour tout entier naturel  $n$  :  $P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}$   
 (b) Montrer que la variable aléatoire  $Y + 1$  suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.  
 En déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .
3. Soit  $U$  une variable de Bernoulli telle que  $P(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$ .  
 On suppose que les variables aléatoires  $U$  et  $Y$  sont indépendantes.  
 Soit la variable aléatoire  $T = (2U - 1)Y$ , produit des variables aléatoires  $2U - 1$  et  $Y$ .  
 Ainsi,  $T$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , l'ensemble des entiers relatifs.  
 (a) Montrer que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance  $E(T)$  et calculer  $E(T)$   
 (b) Vérifier que  $T^2 = Y^2$   
 En déduire que la variable aléatoire  $T$  admet une variance  $V(T)$  et calculer  $V(T)$   
 (c) Pour tout nombre entier relatif  $n$ , calculer la probabilité  $P(T = n)$ .
4. Soit la variable aléatoire  $D = X - Y$ . On note  $F_D$  la fonction de répartition de  $D$ .  
 (a) Justifier :  $\forall t \in ]-\infty; 0[, F_D(t) = 0$  et :  $\forall t \in [1; +\infty[, F_D(t) = 1$ .  
 (b) Soit  $t \in [0; 1[$ . Exprimer l'événement  $(D \leq t)$  à l'aide des événements  $(n \leq X \leq n + t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$   
 (c) Pour tout nombre réel  $t \in [0; 1[$  et pour tout nombre entier naturel  $n$ , calculer la probabilité  $P(n \leq X \leq n + t)$ .  
 (d) Montrer :  $\forall t \in [0; 1[, F_D(t) = \frac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}$   
 (e) Montrer que  $D$  est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de  $D$ .