Interrogation écrite n°2 (Durée 30')

Exercice 1. Soit A une matrice carrée d'odre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^3 = 0_n$.
Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$. En déduire que $I - A$ est inversible puis calculer son inverse.

Exercice 2. Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Montrer que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à déterminer.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire une expression de A^n.
4. Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$
5. Déduire une expression de X_n en fonction de A^n et X_0. Puis déduire le terme général de u.

Réponse

Exercice 1. On a $(I + A + +A^2)(I - A) = I - A^3 = I$ car $A^3 = 0$. Donc $I - A$ est inversible et son inverse est $I + A + A^2$.

Exercice 2. Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice inverse de P la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On l'a trouve en appliquant la méthode de Gauss-Jordan vue en cours.
2. Si $D = P^{-1}AP$, après calculs on trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$, à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$, $D^0 = I_3$, $A^0 = I_3$ et $P^{-1}I_3P = I_3$ donc $D^0 = P^{-1}A^0P$.
Supposons que $D^n = P^{-1}A^nP$ pour n fixé.
$$D^{n+1} = DD^n = DP^{-1}A^nP = P^{-1}APP^{-1}A^nP = P^{-1}A^{n+1}P$$
. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = D^n$.
Ainsi
$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1}\times 4+(-1)^n-3}{6} & \frac{-(-1)^n+1}{2} & \frac{(-1)^n-2^n\times 4+3}{3} \\ \frac{2\times 2^{n+1}-(-1)^n-3}{6} & \frac{(-1)^n+1}{2} & \frac{-(-1)^n-2\times 2^n+3}{3} \\ \frac{2^{n+1}+(-1)^n-3}{6} & \frac{-(-1)^n+1}{2} & \frac{(-1)^n-2^n+3}{3} \end{pmatrix}$$
4. Un simple calcul matriciel permet de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ avec $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
5. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$, à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $X_0 = I_3X_0$.
Supposons que $X_n = A^nX_0$ pour n fixé, $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.
On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
Pour obtenir le terme général de u il suffit de calcul le coefficient de la troisième ligne de X_n qui donne $u_n \frac{2^{n+1}+(-1)^n-3}{3} + \frac{-(-1)^n+1}{2} - \frac{(-1)^n-2^n+3}{3}$.