

Interrogation écrite n°2 (Durée 30')

Exercice 1. Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^3 = 0_n$.

Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$. En déduire que $I - A$ est inversible puis calculer son inverse.

Exercice 2. Soit u définie par $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Montrer que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à déterminer.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire une expression de A^n .
4. Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
5. Déduire une expression de X_n en fonction de A^n et X_0 . Puis déduire le terme général de u .

Réponse