

**Interrogation écrite n°3 (Durée 50')****Exercice 1.** 1. Résoudre :

(a)  $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$

(b)  $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 > 0.$

(c)  $x - 3\sqrt{x} + 2 > 0.$

2. Montrer que :

(a)  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \frac{x^2}{2} + x + 1$

**Réponse**

**Exercice 2.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 9 \\ -30 & 19 \end{pmatrix} , \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer  $P^{-1}$  et déterminer la matrice diagonale  $D$  telle que  $A = PDP^{-1}$ .
2. Déterminer toutes les matrices  $M \in M_2(\mathbb{R})$  telles que  $MD = DM$ .
3. En déduire l'ensemble des matrices  $N$  telles que  $NA = AN$  (Indication : Poser  $M = P^{-1}NP$  et utiliser 2))
4. Déterminer toutes les matrices  $Q \in M_2(\mathbb{R})$  telles que  $Q^2 = D$  (Indication : vérifier que  $QD = DQ$  et utiliser 2))
5. En déduire l'ensemble des matrices  $R$  de  $M_2(\mathbb{R})$  telles que  $R^2 = A$  (Indiction : poser  $Q = P^{-1}RP$  )

**Réponse**