

Interrogation écrite n°3 (Durée 50')**Exercice 1.** 1. Résoudre :

(a) $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$

(b) $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 > 0.$

(c) $x - 3\sqrt{x} + 2 > 0.$

2. Montrer que :

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq \frac{x^2}{2} + x + 1$

Réponse

Exercice 2. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 9 \\ -30 & 19 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^{-1} et déterminer la matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $MD = DM$.
3. En déduire l'ensemble des matrices N telles que $NA = AN$ (Indication : Poser $M = P^{-1}NP$ et utiliser 2))
4. Déterminer toutes les matrices $Q \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = D$ (Indication : vérifier que $QD = DQ$ et utiliser 2))
5. En déduire l'ensemble des matrices R de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$ (Indiction : poser $Q = P^{-1}RP$)

Réponse