Interrogation écrite n°3 (corrigé)

Exercice 1. 1. Résoudre :

(a) $\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2 > 0$

(b) $(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 > 0$.

(c) $x - 3\sqrt{x} + 2 > 0$.

2. Montrer que :

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2} + x + 1$

Réponse

Exercice 1. 1. (a) On pose $X = e^x > 0$. L'inéquation $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$ devient :

$$X^2 - 3X + 2 > 0$$

On a : $\Delta = 1, X_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \,\text{et}\, X_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$$\begin{aligned} X^2 - 3X + 2 > 0 &\Leftrightarrow X < 1 \text{ ou } X > 2 \\ &\Leftrightarrow (e^x < 1 \text{ ou } e^x > 2) \\ &\Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > \ln(2)) \end{aligned}$$

Donc $S =]-\infty, 0[\cup] \ln(2), +\infty[$

(b) Pour tout $x > 0$, on pose $X = \ln(x)$

$$\begin{aligned} X^2 - 3X + 2 > 0 &\Leftrightarrow X < 1 \text{ ou } X > 2 \\ &\Leftrightarrow (\ln(x) < 1 \text{ ou } \ln(x) > 2) \\ &\Leftrightarrow (0 < x < e \text{ ou } x > \mathrm{e}^2) \end{aligned}$$

Donc $S =]0, e[\cup]\mathrm{e}^2, +\infty[$

(c) Pour tout $x > 0$, on pose $X = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} X^2 - 3X + 2 > 0 &\Leftrightarrow (X < 1 \text{ ou } X > 2) \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} < 1 \text{ ou } \sqrt{x} > 2\right) \\ &\Leftrightarrow (0 \leqslant x < 1 \text{ ou } x > 4) \end{aligned}$$

Donc $S = [0, 1[\cup]4, +\infty[$

2. (a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.
On a : $f'(x) = e^x - 1$ d'où $f'(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty, 0]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0; +\infty[$. Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $f(0)$ est le minimum de f.
Or $f(0) = 0$, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$, soit $e^x > x + 1$.

(b) On définit la fonction g par :
$\forall x \geqslant 0, g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - x - 1$. On a, d'après (a), $g'(x) = \mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$.
Donc g est croissante, et comme $g(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geqslant g(0) = 0$, c' est à dire $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2} + x + 1$.

Exercice 2. Soient
$$A = \begin{pmatrix} -14 & 9 \\ -30 & 19 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^{-1} et déterminer la matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Déterminer toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $MD = DM$.
3. En déduire l'ensemble des matrices N telles que $NA = AN$ (Indication : Poser $M = P^{-1}NP$ et utiliser 2))
4. Déterminer toutes les matrices $Q \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = D$ (Indication : vérifier que $QD = DQ$ et utiliser 2))
5. En déduire l'ensemble des matrices R de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$ (Indiction : poser $Q = P^{-1}RP$)

Réponse

Exercice 2.

1. On a : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}AP$.
   Or $P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} -14 & 9 \\ -30 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
2. On pose $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$
$$\begin{aligned} MD = DM &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 4y \\ z & 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 4z & 4t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = y \\ z = 4z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = z = 0 \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   Donc les matrices M telles que MD = DM sont les matrices diagonales.
3. En posant $M = P^{-1}NP$ on obtient :
$$\begin{aligned} NA = AN &\Leftrightarrow PMP^{-1}A = APMP^{-1} \\ &\Leftrightarrow PMP^{-1}PDP^{-1} = PDP^{-1}PMP^{-1} \\ &\Leftrightarrow PMDP^{-1} = PDMP^{-1} \\ &\Leftrightarrow MD = DM. \end{aligned}$$
   Or les solutions de $MD = DM$ sont les matrices diagonales. Donc N s'écrit sous la forme :
$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{où } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \\ &= \begin{pmatrix} 3x & y \\ 5x & 2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6x - 5y & -3x + 3y \\ 10x - 10y & -5x + 6y \end{pmatrix} \end{aligned}$$
4. Si $Q^2 = D$ alors $QD = QQ^2 = Q^3 = Q^2Q = DQ$.
   Donc, d'après 2), Q s'écrit sous la forme :

$Q = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ona, alors : $Q^2 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow [(x = -1 \text{ on } x = 1)$

et $(y = -2 \text{ on } y = 2)]$

Les solutions de $Q^2 = D$ sont :

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $R^2 = A \Leftrightarrow P^{-1}R^2P = P^{-1}AP$

$$\Leftrightarrow \left(P^{-1}RP\right)^2 = D$$

En posant $Q = P^{-1}RP$, on a : $Q^2 = D$.
Donc $R = PQP^{-1}$ avec $Q \in \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$. Donc les solutions de $R^2 = A$ sont :

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -30 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & -9 \\ 30 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$$