Sujet 1

Exercice 1

Les but de cet exercice est de calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ sans utiliser la récurrence :

1. (a) vérifier que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$.
   (b) En déduire le calcul de S_n.
2. (a) vérifier que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$.
   (b) En déduire le calcul de T_n.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=n}^{2n-1} 3^k$, $\qquad T = \sum_{k=1}^{n} \frac{5^{2k}}{5^{k-1}}$

Sujet 2

Exercice 1

Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 5^k, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{2k}}{5^k}$

Sujet 3

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+3}$.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{2}$, $\qquad T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (4^k \times 5^{2k} + 9 \times 2^{2k} \times 25^{k-1})$

Sujet 4

Exercice 1

Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 5^k, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{2k}}{5^k}$

Sujet 5

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+3}$.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 2

Calculer $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (3^{2i+1} - 9^{i-1})$, $\qquad B = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} (\frac{k+1}{k+5} - \frac{k+3}{k+7})$.

Sujet 6

Exercice 1

Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n + 1.$$

Exercice 2

Calculer $A = \sum_{i=n}^{2n} k^3, \qquad B = \sum_{i=2}^{n} (\frac{2k+1}{3k+2} - \frac{2k+3}{3k+5})$

Sujet 7

Exercice 1

Pour tout n, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+2)}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{1}{(k-1)(k+2)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+2}$.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} (25^k - 4 \times 5^{2k+1})$, $\qquad T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3k-1}{k^2} - \frac{3k+2}{k^2+2k+1} \right)$

Sujet 8

Exercice 1

Soit $a \in]-1\,;+\infty[$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+a)^n \geqslant 1+na$$

.

2. Ce résultat subsiste-il si $a < -1$? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Calculer $A = \displaystyle\sum_{i=n}^{2n} k(k-1)$, $\qquad B = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{2k+1}{3k+2} - \frac{2k+5}{3k+7}\right)$

Sujet 9

Exercice 1

Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n + 1.$$

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{4^k}{2^{2k-1}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4k+4}{k^2(k+2)^2}$.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; \frac{k+1}{k^2(k+2)^2} = \frac{a}{k^2} + \frac{b}{(k+2)^2}.$$

   (b) En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Sujet 10

Exercice 1

Soit $a \in]-1\,;+\infty[$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(1+a)^n \geqslant 1+na$$
.
2. Ce résultat subsiste-il si $a < -1$? Justifier votre réponse.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} 9^k 3^{2k-1}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{k+1}{(2k+1)^2(2k+3)^2} = \frac{a}{(2k+1)^2} + \frac{b}{(2k+3)^2}.$$
   (b) En déduire l'expression de T_n en fonction de n.