

Révision(Intégration)

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, justifier que la fonction est C^1 sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.

$$\begin{aligned}
 a : x &\mapsto \int_1^x \ln t \, dt & b : x &\mapsto \int_{-2}^x \frac{dt}{1-t^2} & c : x &\mapsto \int_{-3}^x \sqrt{t^4-1} \, dt \\
 d : x &\mapsto \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3+1}} \, dt \\
 e : x &\mapsto \int_{-1}^x \frac{dt}{t^4+1} & f : x &\mapsto \int_1^x \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \, dt & g : x &\mapsto \int_x^{-4} \sqrt{1+t^2} \, dt \\
 h : x &\mapsto \int_{1/2}^x \frac{dt}{t^2-t}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le signe sur le domaine de définition et étudier la parité éventuelle

$$\begin{aligned}
 a : x &\mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} \, dt & b : x &\mapsto \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \, dt & c : x &\mapsto \int_0^x |t| \, dt \\
 d : x &\mapsto \int_1^x |t|^3 \, dt \\
 e : x &\mapsto \int_0^x \frac{\sqrt{t} \, dt}{t^4+1} & f : x &\mapsto \int_1^x \exp(-t^2) \, dt & g : x &\mapsto \int_0^x \sqrt{1+t^2} \, dt \\
 h : x &\mapsto \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

- Justifier que F est C^1 sur \mathbb{R} , que F est impaire et donner le signe de F sur \mathbb{R} .

2. En justifiant que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2}$, montrer que $\forall x \geq 0$, $F(x) \leq 2$.

3. En déduire que la fonction F admet une limite L en $+\infty$ et que $L \leq 2$.

4. Montrer que $\forall x \geq 0$, $F(x) \geq \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2}$ et en déduire que $L \geq 1$.

5. Démontrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une et une seule solution sur \mathbb{R} .

6. Une identité remarquable. On pose $G(x) = F(x) + F(1/x)$.

(a) Justifier que G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer G' . Que dire de G ?

(b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

Exercice 4

On considère la fonction $F(x) = \int_2^x \frac{s^2}{s^2-1} \, ds$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur \mathcal{D}_F et expliciter F' .

2. Etablir que $\forall s \geq 1$, $\int_2^x s \, ds \leq F(x) \leq \int_2^x \left(s + \frac{1}{s-1}\right) \, ds$.

En déduire les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x^2}$.

Exercice 5

On considère les fonctions $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$ et $G(x) =$

$$\int_{1/x}^x \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$$

1. Montrer que F est C^1 sur \mathcal{D}_f et calculer F' .

2. Expliciter \mathcal{D}_G puis exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Montrer que G est dérivable sur \mathcal{D}_G . Calculer G' et $G(1)$. En déduire G .

Exercice 6

On considère la fonction $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

1. Donner le domaine de définition de F .
2. Montrer que : $\forall t \geq 0 \quad \frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$.
Donner un encadrement de F et déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Etudier la dérivabilité de $G : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. Exprimer F à l'aide de G .

En déduire que F est dérivable sur \mathcal{D}_F et calculer F' .

Exercice 7

On considère la fonction numérique Φ définie par $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$.

1. Calculer \mathcal{D}_Φ et montrer que Φ est une fonction impaire
2. Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leq \Phi(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
En déduire la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Etudier la dérivabilité de $\Gamma : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$. Exprimer Φ à l'aide de Γ .
4. Justifier la dérivabilité de Φ sur \mathbb{R} et calculer $\Phi'(x)$.