

EXERCICE 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} est la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

- 1.(a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f .
- (c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f .
- (d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.

(a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .

(b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base \mathcal{B}' est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B} est la matrice M .

- (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
- (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base \mathcal{B}' .
- (c) En déduire que M est inversible.
- (d) À l'aide de la question 1(a), calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I , M et M^2 .
- (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n , en fonction des matrices I , A et A^2 .
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base \mathcal{B}' est V .

1. Montrer que $VT = TV$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
- 2.(a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f .
En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

- (b) Montrer que $g(e'_2) - ae'_2$ appartient aussi au noyau de f .
En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.
- (c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = ae'_2 + be'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient au noyau de f .
- (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

3. Calculer V^2 en fonction de a, b et c , puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

EXERCICE 2

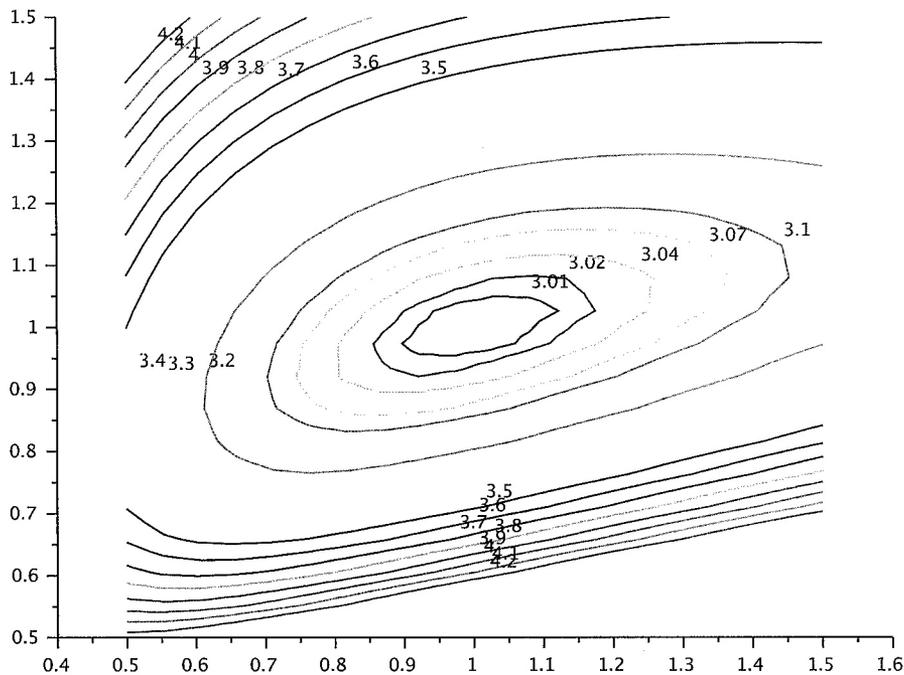
On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

La première partie consiste en l'étude des extrema éventuels de la fonction f , et la deuxième partie a pour objectif l'étude d'une suite implicite définie à l'aide de la fonction f .
Ces deux parties sont indépendantes.

Partie A

1. On utilise Scilab pour tracer des lignes de niveau de la fonction f . On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f , dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

- 2.(a) Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
- (b) Calculer les dérivées partielles premières de f , puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A , que l'on déterminera.
- (c) Calculer les dérivées partielles secondes de f , puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.
- (d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum ou un maximum, et donner sa valeur.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation : $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n , et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
- 3.(a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}.$$

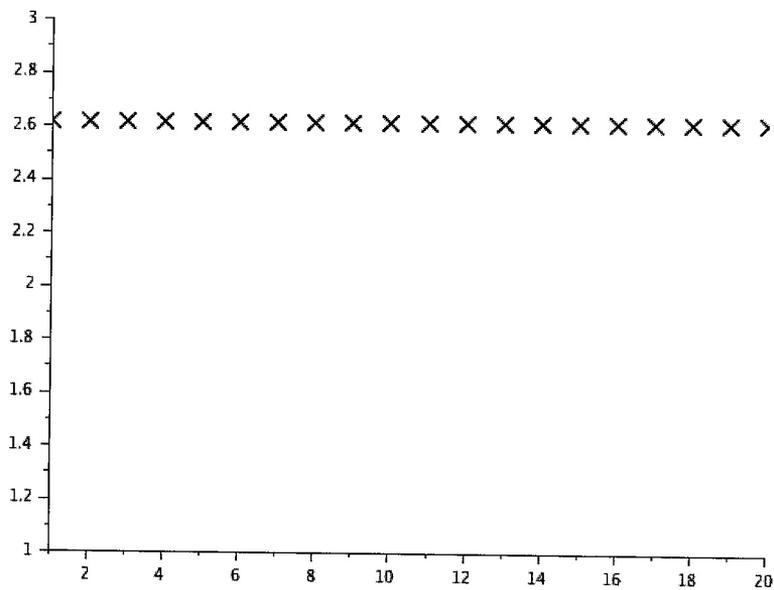
- (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$.
- (c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.
- 4.(a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.
- (b) En supposant que $\ell > 1$, démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.
- (c) Déterminer la limite de (v_n) .
- 5.(a) Montrer que : $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$.
- (b) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ en entrée.
- (c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
function res=v(n)
    a = 1
    b = 3
    while (b-a)>10^(-5)
        c = (a+b)/2
        if h(n,c) < 4 then .....
            else .....
        end
    end
    .....
endfunction
```

(d) À la suite de la fonction v , on écrit le code suivant :

```
X=1:20
Y=zeros(1,20)
for k=1:20
    Y(k)=v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=2)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

(e) Montrer que : $\forall n \geq 1, (v_n)^n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4(c).

EXERCICE 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1, \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1, \\ \frac{-1}{t^3} & \text{si } t \leq -1. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge et calculer sa valeur.
- 3.(a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a : $\int_{-A}^{-1} f(t)dt = \int_1^A f(u)du$.
En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} f(t)dt$ converge et donner sa valeur.
- (b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X .
- (a) Montrer que, pour tout réel x , on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- (b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
- (c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.
- (a) Donner la fonction de répartition de Y , et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
- (b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (c) Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Partie B

1. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendante de la variable aléatoire Y .

Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

(a) Déterminer la loi de la variable $Z = \frac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D .

(b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

(c) Montrer que pour tout réel x , on a :

$$P(T \leq x) = \frac{1}{2}P(Y \leq x) + \frac{1}{2}P(Y \geq -x).$$

(d) En déduire la fonction de répartition de T .

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$ et soit V la variable aléatoire définie

par : $V = \frac{1}{\sqrt{1-U}}$.

(a) Rappeler la fonction de répartition de U .

(b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables aléatoires V et Y suivent la même loi.

3.(a) Écrire une fonction en langage Scilab, d'en-tête `function a=D(n)`, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D .

(b) On considère le script suivant :

```
n = input('entrer n')
a=D(n)
b=rand(1,n)
c=a/sqrt(1-b)
disp(sum(c)/n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur c sont-ils une simulation ? Pour n assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.

