MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe I
Programmes de mathématiques appliquées - informatique

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG 1ère année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :
- une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthése, ...) ;
- l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;
- une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à à développer chez les étudiants les compétences suivantes :
- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe de terminale. Le programme de mathématiques appliquées s'inscrit dans le même esprit, résolument tourné vers l'utilisation d'outils mathématiques et informatiques pour résoudre des problématiques concrètes, tout en maintenant un apprentissage mathématique solide et rigoureux. On privilégie autant que possible les références aux autres disciplines pour motiver l'introduction d'outils mathématiques ou informatiques et en souligner l'efficacité.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordé par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle. L'espace vectoriel, comme objet abstrait, n'est pas au programme.
- La théorie des graphes est un outil de modélisation très utilisé. Elle permet de mettre en œuvre le calcul matriciel et de le mettre en situation sur des algorithmes.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples pathologiques. On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
  L'étude des séries va permettre l'étude des variables aléatoires discrètes. Celle des intégrales généralisées n'est pas au programme de la première année. Il est à noter que, dans ce programme, les comparaisons des suites, séries et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalents ne seront traitées qu'en seconde année.
- Les équations différentielles sont présentées dans le cadre d'études de phénomènes d'évolution en temps continu, adossées si possible à leur version discrète en termes de suites. On met en avant les aspects mathématiques de la notion d'équilibre.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
  On considèrera des espaces probabilisés finis au premier semestre, plus généraux au second semestre.
- L'algorithmique s'inscrit naturellement dans la démarche de résolution de problèmes. Les activités de programmation qui en résultent constituent un aspect essentiel de l'apprentissage de l'informatique. Des exemples ou des exercices d'application sont choisis pour leur intérêt dans les autres disciplines ou pour leur importance stratégique (l'analyse de données).

L'utilisation du langage Python est enseigné tout au long de l'année en lien direct avec le programme. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de visualiser concrètement les résultats obtenus grâce aux concepts et outils mathématiques enseignés et de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple l'analyse de graphes, de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse, du traitement de calculs matriciels en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales, ...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et la spécialité choisie en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme admis, la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Ce chapitre présente des points de vocabulaire, des notations, ainsi que certains types de raisonnement (par l'absurde, par contraposée, par récurrence...) et de démonstrations (d'implications, d'équivalences, d'inclusions...) dont la maîtrise s'avère indispensable à une argumentation rigoureuse sur le plan mathématique.

Le contenu de ce chapitre ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique. Les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée, et à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés, pourront être renforcées au-delà, en fonction de leur utilité.

1 - Eléments de logique

Les étudiants doivent savoir :

• utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel et existentiel ; repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs à des fins d'abréviation est exclu.

• distinguer dans le cas d'une proposition conditionnelle la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

• utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

• formuler la négation d'une proposition ;

• utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

• reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

2 - Raisonnement par récurrence

Apprentissage et emploi du raisonnement par récurrence.

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Notations $\sum$, $\prod$.

Illustration par manipulation de sommes et de produits. ▶
Formules donnant : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{N}^2$.

3 - Ensembles, applications

L'objectif de cette section est d'acquérir ou de consolider le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance.
Sous-ensemble (ou partie), inclusion.
Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.
Réunion. Intersection.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).

Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.

Le complémentaire d'une partie A de E est noté $\bar{A}$.

Produit cartésien.

On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition.

Composition.
Injection, surjection, bijection, application réciproque.

Ces notions seront introduites sur des exemples simples, toute manipulation trop complexe étant exclue.
La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.

Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

L'objectif de cette partie du programme est :
– d'une part d'initier au calcul matriciel afin de permettre la résolution de problèmes issus, notamment, des probabilités ;
– d'autre part de parvenir à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires et de les interpréter sous forme matricielle.
L'étude de ce chapitre sera menée en lien avec l'informatique. ▶
On introduit la problématique des systèmes linéaires, puis on présente l'utilité de l'écriture matricielle en utilisant des exemples simples de tableaux entrée-sortie ou des tableaux de Leontieff.

Tout développement théorique est hors programme.

1 - Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.	
Système homogène, système de Cramer.	
Résolution par la méthode du pivot de Gauss.	La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On donnera des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution et où il existe plusieurs solutions.
Ensemble des solutions d'un système linéaire.	On insiste sur les propriétés de stabilité de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en vue de l'introduction de la notion de sous-espace vectoriel au second semestre

2 - Calcul matriciel

a) Définitions

Définition d'une matrice réelle à n lignes et p colonnes. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Matrices colonnes, matrices lignes. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité.	
Transposée d'une matrice. Matrices symétriques.	Notation ${}^tA$. On caractérisera les matrices symétriques à l'aide de la transposée.

b) Opérations matricielles

Somme, produit par un nombre réel, produit. Propriétés des opérations. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices carrées.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. $\boxed{\blacktriangleright}$
Opérations sur les matrices carrées ; puissances.	Exemples de calcul des puissances n-èmes d'une matrice carrée ; application à l'étude de suites réelles satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. $\boxed{\blacktriangleright}$ La formule du binôme n'est pas un attendu du programme du premier semestre.
Matrices inversibles. Inverse d'un produit.	On admettra que pour une matrice carrée, un inverse gauche ou droit est l'inverse.

Écriture matricielle $AX = Y$ d'un système linéaire. Unicité de la solution lorsque la matrice A est inversible.	On pourra illustrer sur des exemples la recherche de l'inverse d'une matrice A par résolution du système $AX = Y$. Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Exemples d'utilisation d'un polynôme annulateur pour déterminer l'inverse.
Déterminant d'une matrice $(2, 2)$.	Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.

III - **Théorie des graphes**

Un graphe fini est un outil simple et efficace de modélisation. Les graphes sont utilisés en sciences sociales pour la modélisation des réseaux sociaux et en économie pour des modèles d'évolution. On introduit des exemples importants comme le graphe du web ou ceux de différents réseaux sociaux en indiquant dans la mesure du possible la taille. Un graphe est peut être représenté par sa matrice d'adjacence et le calcul matriciel en permet une analyse qui peut s'interpréter concrètement. Cette analyse est choisie en première approche $\boxed{\blacktriangleright}$.

Graphes, sommets, sommets adjacents, arêtes.	Un graphe peut être orienté ou non.
Matrice d'adjacence.	La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. On donne des exemples (graphe eulérien, graphe complet,...) avec leurs matrices.
Chaîne (chemin). Longueur d'une chaîne (d'un chemin). Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G, le $(i, j)-$ème coefficient de la matrice A^d est le nombre de chemins de longueur d du sommet i au sommet j.	
Graphe connexe.	Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G à n sommets, A est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.
Degré d'un sommet.	Formule d'Euler (dite des poignées de main).
Analyse des réseaux sociaux	On introduira sur des exemples simples quelques mesures utilisées dans l'analyse de réseaux sociaux et leur interprétation (recherche d'influenceurs...) comme le degré de centralité ou le degré d'intermédiarité de chaque sommet. Ces notions ne sont pas exigibles.

IV - **Suites de nombres réels**

L'étude des suites numériques au premier semestre permet aux étudiants de consolider la notion de suite réelle et de convergence abordée en classe terminale. Tout exposé trop théorique sur ces notions est à exclure.
Cette première approche des suites élargit la conception de la notion de fonction.
Les calculs d'intérêts, d'amortissement ou de multiplicateurs keynesiens peuvent les mettre en situation.
L'étude des suites classiques pourra être motivée puis se faire en lien étroit avec la partie probabilités

pour mettre en avant l'utilité de cet outil numérique.
On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en particulier pour illustrer la notion de convergence. ▶

1 - Généralités sur les suites réelles

Définitions, notations.
Exemples de définitions : par formules récursives ou explicites, par restriction d'une fonction de variable réelle aux entiers.

2 - Suites usuelles : formes explicites

Suite arithmétique, suite géométrique.

Formule donnant $\sum_{k=0}^{n} q^k$.
Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.

Suite arithmético-géométrique.

Les étudiants devront savoir se ramener au cas d'une suite géométrique.

Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.

On se limitera au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. ▶

3 - Convergence d'une suite réelle

Aucune démonstration concernant les résultats de cette section n'est exigible.

Limite d'une suite, suites convergentes.

$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, élément de $\mathbf{R}$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient les termes u_n pour tous les indices n, hormis un nombre fini d'entre eux.

Généralisation aux limites infinies.
Unicité de la limite.
Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Aucune technicité sur ces opérations ne sera exigée.

Existence d'une limite par encadrement.
Suites monotones.
Théorème de la limite monotone.

Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge.
Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) .

Suites adjacentes.

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers une même limite ℓ, la suite (u_n) converge vers ℓ.

4 - Comportement asymptotique des suites usuelles

Croissances comparées.	Comparaison des suites (n^a), (q^n), $((\ln(n))^b)$. Résultats admis.

V - Fonctions réelles d'une variable réelle

Il s'agit, dans ce chapitre, de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et quelques théorèmes sur les fonctions d'une variable réelle. On utilisera autant que possible la représentation graphique des fonctions pour illustrer ou conjecturer ces résultats, qui prennent tout leur sens dans une synthèse récapitulative.
Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles et à celles qui s'en déduisent de façon simple. On se restreindra aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$. *Les fonctions trigonométriques sont hors programme.*
L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Compléments sur les fonctions usuelles

a) Fonctions polynômes

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On confond un polynôme avec sa fonction polynomiale.

Degré, somme et produit de polynômes.	Par convention, deg $0 = -\infty$.
Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$, ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Racines d'un polynôme. Factorisation par $(x-a)$ dans un polynôme ayant a comme racine.	Application : un polynôme de $\mathbf{R}_n[x]$ admettant plus de $n+1$ racines distinctes est nul. Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. ▶
Trinômes du second degré.	Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur $\mathbf{R}$. Relation entre les coefficients du polynôme et la somme et le produit des racines. Relation entre les signes des coefficients du polynôme et les signes de ses racines.

b) Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$

Définitions ; notations, propriétés, représentations graphiques.	On fera une étude détaillée des fonctions puissances. Les étudiants doivent connaître les règles de calcul sur les puissances.

c) Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur $\mathbf{R}$.
On insistera sur la fonction valeur absolue.

d) Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.
La notation E est réservée à l'espérance mathématique.

e) Fonctions logarithme et exponentielle

Rappel des propriétés. Positions relatives des courbes représentatives de $\ln, \exp, x \longmapsto x$.

Par le biais d'exercices, étude de fonctions du type $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$.

2 - Limite et continuité d'une fonction en un point

Définition de la limite d'une fonction en un point et de la continuité d'une fonction en un point.
Unicité de la limite.
Limite à gauche, limite à droite. Extension au cas où la fonction est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.

On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur un intervalle I, x_0 étant un réel élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, cela signifie que f est continue au point x_0 et, dans le cas contraire, que f se prolonge en une fonction continue au point x_0.

Opérations algébriques sur les limites.
Compatibilité du passage à la limite avec les relations d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Limite d'une fonction composée.
Si f est une fonction définie sur un intervalle I admettant une limite ℓ en un point x_0, et si (u_n) est une suite d'éléments de I convergeant vers x_0, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Études asymptotiques des fonctions exponentielle et logarithme.

Comparaison des fonctions exponentielle, puissance et logarithme au voisinage de $+\infty$ et des fonctions puissance et logarithme au voisinage de 0.

Croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a |\ln(x)|^b$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |x|^a \mathrm{e}^{bx}$.

Les notions d'équivalence et de négligeabilité ne seront abordées qu'en deuxième année.

3 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section.

Fonctions paires, impaires. Fonctions majorées, minorées, bornées. Fonctions monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle. Opérations algébriques, composition.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Résultat admis.
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations : $\max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ et $\min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$. On illustrera ces résultats par des représentations graphiques et on montrera comment les mettre en évidence sur un tableau de variations.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
Continuité et sens de variation de la fonction réciproque. Représentation graphique de la fonction réciproque.	On utilisera ces résultats pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. ▶.

4 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle. Régionnements du plan

Il s'agit de revenir et d'utiliser les notions du paragraphe d'analyse en les illustrant sur des exemples. On pourra utiliser quelques exemples issus du cours de micro-économie (modèle de l'équilibre entre offre et demande, économies d'échelle...) ▶

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Etude locale, variations, monotonie ou convexité.
Positions relatives de deux courbes.	On pourra utiliser des exemples issus du cours de micro-économie, comme la loi de l'offre et la demande, et donner des interprétations de déplacement des courbes.
Représentations graphiques dans le plan de l'ensemble des solutions d'une inéquation du type $y > f(x)$ ou $y \geqslant f(x)$.	Exemples de régionnements.

VI - **Probabilités et stastistiques**

1 - Stastistiques univariées

a) Généralités

La plupart des notions abordées dans ce paragraphe ont été abordées les années précédentes. Il s'agira ici d'encourager les étudiants à choisir les représentations graphiques et les indicateurs étudiés pour leur pertinence et de travailler leur esprit critique. L'enseignement de ce chapitre doit impérativement avoir lieu en lien étroit avec l'informatique afin de manipuler des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales. ▶

Introduction.	On introduira brièvement le chapitre en expliquant les rôles des différentes étapes d'une étude statistique : statistique descriptive, statistique inférentielle.
Population, individu, échantillon, variable statistique. Variable quantitative discrète, continue, variable qualitative.	Il s'agit ici d'introduire le vocabulaire adapté pour l'étude d'une série statistique.
Série statistique associée à un échantillon.	Série statistique de taille n portant sur un caractère. n-uplet des observations.

b) Etude d'une variable quantitative discrète

Dans cette section, les séries statistiques étudiées seront des séries quantitatives discrètes.

Description d'une série statistique discrète : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.	Diagramme des fréquences cumulées.
Fonction de répartition et quantiles.	Boîte à moustaches. (on pourra comparer des échantillons grâce au résumé de leurs séries statistiques).
Indicateurs de tendance centrale : moyenne $\bar{x}$ et médiane d'une série statistique. Définitions et propriétés de la moyenne et de la médiane.	Propriétés de la moyenne et la médiane par transformation affine.
Caractéristiques de dispersion : étendue, écart interquartile.	On discutera selon les données étudiées de la pertinence des différents indicateurs choisis.
Variance s_x^2 et écart-type s_x d'une série statistique : définitions et propriétés. Formule de Koenig.	Pour un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ on définit la variance empirique par : $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

2 - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables.	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples où l'univers Ω des résultats possibles est fini, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.

Événements, événements élémentaires, opérations sur les événements, événements incompatibles.

On fera le lien entre ces opérations sur les événement et les connecteurs logiques.

Système complet d'événements fini.

Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les deux conditions suivantes :
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

3 - Coefficients binomiaux

Factorielle, notation $n!$.

Interprétation de $n!$ en tant que nombre de bijections d'ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments $\boxed{\blacktriangleright\ .}$

Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$.

Nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Formule du triangle de Pascal.

La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul efficace pour le calcul numérique des coefficients binomiaux. $\boxed{\blacktriangleright}$

$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

On pourra démontrer cette formule par récurrence à partir de la formule du triangle de Pascal.

4 - Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

On restreint, la notion de probabilité à une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant :
- pour tous A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A\cap B = \emptyset$, $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\Omega) = 1$.

Cas de l'équiprobabilité.

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Généralisation à la réunion de 3 événements.

5 - Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.

Notation P_A.

Formule des probabilités composées.

- Si $P(A) \neq 0$, $P(A\cap B) = P(A)P_A(B)$.
- Si $P(A_1\cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Formule des probabilités totales	Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)$. Si de plus, pour tout i $(1\leqslant i\leqslant n)$, $P(A_i)\neq 0$, on a : $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

6 - Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.	Si $P(A)\neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B)=P(B)$.
Indépendance mutuelle de n événements $(n\in \mathbf{N}^*)$. Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i=A_i$ ou $\overline{A_i}$.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

I - L'espace $\mathbf{R}^n$, sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Ce chapitre ne doit pas donner lieu à un exposé théorique ; on donne ici une approche concrète à des notions. Pour simplifier ce premier contact, l'étude se limitera à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, en privilégiant les exemples pour $n\in\{2,3,4\}$.

a) Espace $\mathbf{R}^n$

Définition de $\mathbf{R}^n$. Loi interne $+:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. Loi externe $\cdot:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. Propriétés d'associativité et de distributivité. Combinaisons linéaires.	On privilégiera le travail sur les espaces $\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^4$. On introduira un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ comme matrice des coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ dans la base canonique.
Base canonique de $\mathbf{R}^n$.	Les espaces vectoriels ci-dessus sont naturellement équipés de leur base canonique.

b) Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$.	Un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs. On remarque qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires. On classifiera les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.	On reviendra sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à $2, 3, 4$ inconnues.
Sous-espace vectoriel engendré.	Notation $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	
Base d'un sous-espace vectoriel.	$(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
Si un sous-espace vectoriel admet une base constituée de p vecteurs, toute autre base a p vecteurs. Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.	Théorème admis.
Famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension n. Résultats admis.	Cardinal d'une famille libre (respectivement génératrice) d'un sous-espace vectoriel de dimension n.
Une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est une base.	Résultats admis.
Rang d'une famille de vecteurs.	

c) Applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.

Noyau.	Le noyau d'une matrice est un sous-espace vectoriel.
Rang d'une matrice.	Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.	Résultat admis.
Etude de l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ définie par une matrice M.	$(X \to MX)$
Composition.	Produit matriciel.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Théorème du rang.	Résultat admis.

II - Calcul différentiel et intégral

Le but de ce chapitre est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions. Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Calcul différentiel

a) Dérivation

Dérivée en un point. Tangente au graphe en un point. Dérivée à gauche, à droite.	Notation $f'(x)$. $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$. On fera le lien entre cette formule et l'équation de la tangente au point x. Limites des taux d'accroissement de la fonction exponentielle, de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et des fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée.	Notation f'.
Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions puissances. Dérivée des fonctions composées.	On évitera tout excès de technicité dans les calculs de dérivées.
Inégalités des accroissements finis.	Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert$. Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $\lvert f'\rvert \leqslant k < 1$. $\boxed{\blacktriangleright}$ Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.	Résultat admis. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Extremum local d'une fonction dérivable.	Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

b) Dérivées successives

Fonctions 2 fois dérivables.
Fonctions de classe C^1, C^2, C^∞.
Opérations algébriques.

c) Convexité

Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Tous les résultats de cette section seront admis. Les fonctions étudiées sont au moins de classe C^2.

Définition d'une fonction convexe.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$ Interprétation géométrique. ▶
Fonctions concaves. Points d'inflexion.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^2.	Si f est de classe C^2, f est convexe si et seulement si l'une de ces deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • f" est positive ; • C_f est au-dessus de ses tangentes.
Caractérisation des fonctions concaves de classe C^2. Si la dérivée d'une fonction convexe f de classe C^2 sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.	
Représentation graphique d'une fonction convexe.	▶

2 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Allure locale du graphe. Exemples de points d'inflexion.

3 - Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Les modèles mathématiques utilisés pour étudier des phénomènes dynamiques peuvent être à temps discret ou à temps continu. La problématique de modélisation en temps continu sera mise en place à l'aide des équations différentielles linéaires à coefficients constants. On donnera l'exemple de l'équation différentielle logistique sans insister sur les difficultés techniques, en lien avec le modèle de Solow. On introduit la notion d'équilibre, une situation qui n'évolue pas et qu'on obtient le plus souvent comme l'aboutissement du phénomène évolutif.

Résolution de $y' + ay = b(t)$ où a est un nombre réel et b est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$.	Cas particulier où b est constante.
Équation homogène, solution particulière.	On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.
Résolution de $y'' + ay' + by = c$ où a, b et c sont des nombres réels. Équation homogène, solution particulière.	On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.

Exemples de résolution d'équations $y''+ay'+by = c(t)$ où a, b et c est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$.	On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles.
Principe de superposition.	La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée.
Trajectoires.	On remarque qu'une trajectoire est uniquement déterminée par ses conditions initiales et que deux trajectoires différentes sont d'intersection vide. ▶
Équilibre.	Une trajectoire d'équilibre est constante. On constatera sur des exemples que si une trajectoire converge lorsque t tend vers $+\infty$, elle converge vers un équilibre. ▶

4 - Intégration sur un segment

On introduit ce chapitre en rappelant le lien entre la notion de primitive et l'aire sous la courbe estimée par la méthode des rectangles vue en terminale.

a) Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.	Dans le cas où f est continue monotone, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	
Toute fonction continue sur un intervalle admet, sur cet intervalle, au moins une primitive.	Admis.
Intégrale d'une fonction continue sur un segment. Relation de Chasles.	Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par : $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$ où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

b) Propriétés de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale.
L'intégrale d'une fonction positive sur un segment est positive.
L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur le segment.

Si $a \leqslant b$,

$$\left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

Résultat admis
On enseignera aux étudiants à majorer et à minorer des intégrales par utilisation de cette inégalité ou par intégration d'inégalités.

c) Techniques de calcul d'intégrales

On évitera tout excès de technicité pour les calculs d'intégrales par changement de variable.

Calcul de primitives « à vue », déduites de la reconnaissance de schémas inverses de dérivation.

On insistera sur le modèle $u'(x)u(x)^\alpha$ ($\alpha \neq -1$ ou $\alpha = -1$).

Intégration par parties. Changement de variables.

On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.
Les changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices.
On pourra à titre d'exemples étudier des suites définies par une intégrale et des fonctions définies par une intégrale.

III - **Étude élémentaire des séries**

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les suites numériques réelles du premier semestre, une série étant introduite comme une suite de sommes partielles. Aucune technicité n'est exigible en première année. L'étude des variables aléatoires discrètes sera l'occasion d'une mise en œuvre naturelle de ces premières connaissances sur les séries. L'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs.

1 - Séries numériques à termes réels

Série de terme général u_n.
Sommes partielles associées.

Définition de la convergence.
Combinaison linéaire de séries convergentes.

$\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ converge si $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
On pratiquera, sur des exemples simples, l'étude des séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme).
On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n). $\boxed{\blacktriangleright}$

Série à termes positifs.

Convergence absolue.

En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis.

2 - Séries numériques usuelles

Étude des séries $\sum q^n, \sum nq^{n-1}$, $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et calcul de leurs sommes.

Convergence et somme de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Résultats admis.

IV - Probabilités - Variables aléatoires réelles

Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre ; le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.
L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. ▶
L'étude des variables aléatoires discrètes se fera dans la mesure du possible en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets.

1 - Espace probabilisé

On généralisera dans ce paragraphe l'étude effectuée lors du premier semestre sans soulever de difficultés théoriques.

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.

L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union, par intersection dénombrable et par passage au complémentaire.

Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.
Généralisation de la notion de probabilité.

Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω.
Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle.
Généralisation de la formule des probabilités composées.
Généralisation de la formule des probabilités totales.
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.

2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles

Définition d'une variable aléatoire réelle.	X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si X est une application de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout élément x de $\mathbf{R}$, $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$. Démontrer que X est une variable aléatoire ne fait pas partie des exigibles du programme. Notations $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.	

3 - Variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans R

Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$.	L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.	
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limite à des cas simples, tels que $g \ : \ x \longmapsto ax + b$, $g \ : \ x \longmapsto x^2$, $\ldots$

b) Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition de l'espérance.	Quand $X(\Omega)$ est infini, une variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Notation $\mathrm{E}(X)$.
Linéarité de l'espérance. Positivité.	Résultats admis.
Variables aléatoires centrées.	
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $\mathrm{E}(g(X))$ existe si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas $\mathrm{E}(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$.	
Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$.

Formule de Kœnig-Huygens.	$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
$V(aX+b) = a^2 V(X)$.	
Variables aléatoires centrées réduites.	On notera X^* la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

4 - Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Loi certaine.	Caractérisation par la variance.
Loi de Bernoulli. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. ▶
Application : formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$.	Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.
Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbf{N}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. ▶

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique (rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. ▶ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \forall k \in \mathbf{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.
Loi de Poisson. Espérance, variance Contexte d'utilisation.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pourra remarquer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est loi « limite » (cette notion sera précisée en deuxième année) d'une suite de variables suivant la loi binomiale $B(n, \frac{\lambda}{n})$. ▶

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du premier semestre.

Les séances de travaux pratiques du premier semestre poursuivent les objectifs suivants :

- *consolider l'apprentissage de la programmation qui a été entrepris dans les classes du lycée en langage Python ;*
- *mettre en place une discipline de programmation : découpage modulaire à l'aide de fonctions et programmes, annotations et commentaires, évaluation par tests ;*
- *mettre en pratique des algorithmes facilitant le traitement de l'information, la modélisation, la simulation.*

1 - Algorithmique des listes

Il s'agit de présenter des algorithmes simples, spécifiés de façon abstraite, puis de les traduire dans un langage de programmation, ici Python. On utilisera ces activités pour construire une progression pour assimiler les notions de variables, de type, d'affectation, d'instruction conditionnelle, de boucles conditionnelles ou inconditionnelles et manipuler de façon simple les listes en Python. S'il n'est pas souhaitable de les formaliser, on dégagera de l'étude de ces algorithmes simples les problématiques de la correction et la terminaison des algorithmes. Ces notions ne sont pas exigibles.

Recherche séquentielle dans une liste.	Recherche d'un élément. Recherche du maximum, du second maximum.
Algorithmes opérant sur une structure séquentielle par boucles imbriquées.	Recherche des deux valeurs les plus proches dans une liste.
Algorithmes dichotomiques.	Recherche dichotomique dans une liste triée.
Algorithmes gloutons.	Rendu de monnaie. Allocation de salles pour des cours.

2 - Statistiques descriptives et analyse de données.

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques publiques obtenues sous forme d'un fichier csv (Comma-separate-value). Pour ce faire, on pourra utiliser le site data.gouv ou le site de l'Insee et choisir des données socio-économiques. On travaille directement sur le fichier de données sous forme de table en important la bibliothèque `pandas` *ou après transformation directement sur un tableur. On indiquera aux étudiants les commandes à utiliser. Aucune de ces commandes de cette bibliothèque n'est exigible.*

Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	
Exemples d'analyse des données.	On pourra faire des tris sélectifs, donner des exemples de calculs d'indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles. ou d'indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile. On discutera la signification des résultats obtenus.
Représentations des données. Diagrammes en bâtons, histogrammes.	On pourra utiliser la bibliothèque `matplotlib`.

3 - Approximation numérique

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.

On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).

II - Programme du deuxième semestre.

1 - Graphes finis, plus courts chemins

Il s'agit de revenir sur le modèle des graphes et d'étudier les démarches algorithmiques permettant de les analyser selon leurs représentations.

Graphes.

Un graphe est implémenté à l'aide de listes d'adjacence (rassemblées par exemple dans une liste ou dans un dictionnaire) ou par sa matrice d'adjacence.

Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré avec des poids positifs.
Algorithme de Dijkstra.

2 - Simulation de phénomènes aléatoires

Simulation d'expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.
Simulation de phénomènes aléatoires.

Loi binomiale, loi géométrique.

III - Annexe : Langage Python

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi le paragraphe ci-dessous liste limitativement les éléments du langage Python (version 3 ou supérieure) dont la connaissance est exigible des étudiants. Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

1 - Types de base

`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

2 - Structures de contrôle

Instruction d'affectation =.

Instruction conditionnelle `if`, `elif`, `else`.

Boucle `for` ; Boucle `while`.

Définition d'une fonction `def` $f(p_1, \ldots , p_n)$
`return`.

3 - Listes

Tableau unidimensionnel ou liste. Définitions d'une liste avec une boucle ou en compréhension. Fonction `range`. Commandes `append` , `len`.	Il n'y a pas lieu de distinguer ces deux structures de données en langage Python.
Recherche séquentielle dans une liste. Commandes `in del count`.	
Manipulations élémentaires de listes. Commandes + et $*$.	

4 - Utilisation de modules, de bibliothèques

`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

a) Dans la bibliothèque `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye, np.linspace, np.arange`	Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).
`a,b = np.shape(M)`	Taille de la matrice `M`.
`np.dot, np.transpose`	Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean, np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`
`np.exp, np.log, np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.

`np.e, np.pi`

b) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linagl as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,`
`al.solve, al.eig`

c) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal, rd.gamma`	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

d) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim, ylim, axis, grid, legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist, plt.bar, plt.boxplot`	Représentations statistiques.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique.
Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra utiliser les fonctions `rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`

e) Dans la librairie `pandas`

Exemple d'importation : `import pandas as pd`

`pd.read_csv, head, shape, pd.describe`	Pour créer une table à partir du fichier de données et en visualiser ou manipuler une partie.
`pd.mean, pd.std, pd.median, pd.count, pd.sort_values.`	Indicateurs statistiques.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG 2e année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

— une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...) ;

— l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;

— une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées, vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC option mathématiques appliquées, se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie ou gestion dispensés en Grande École ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- En algèbre linéaire, on introduit les espaces vectoriels de dimension finie : les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle, donc naturellement isomorphes à $\mathbf{R}^n$ pour un certain entier naturel n. L'espace vectoriel, comme objet abstrait n'est pas au programme. Cette définition permet de manipuler les espaces vectoriels usuels et d'introduire la notion d'endomorphisme. On introduit la notion de matrice diagonalisable et on en montre l'intérêt. On évitera des exemples trop calculatoires en privilégiant la compréhension des concepts mathématiques. Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de deux variables, mais aussi en probabilités (études de chaînes de Markov).
- En analyse, on introduit les intégrales généralisées qui vont permettre l'étude des variables aléatoires à densité. L'outil de comparaison des suites et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalence, s'avère particulièrement efficace pour l'étude des séries et des intégrales généralisées.
  Il est à noter que seuls les développements limités à l'ordre 1 ou 2 sont au programme.
  Au quatrième semestre, l'étude des fonctions de deux variables réelles constitue un prolongement de l'analyse à une variable. Son objectif principal est d'initier les étudiants aux problèmes d'optimisation, cruciaux en économie et en finance.
- Dans la continuité du programme de première année, et en lien avec les résultats sur la réduction des matrices, on étudie les systèmes différentiels linéaires.
- En probabilité, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, on aborde la notion de graphe probabiliste et la chaîne de Markov associée. On introduit les variables aléatoires à densité, avec l'objectif de permettre, en fin de formation, une bonne compréhension des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.
- En informatique, l'analyse de données en tables déjà étudiée en première année se poursuit avec l'étude des bases de données relationnelles et du langage SQL.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. L'algèbre linéaire trouvera ainsi son application dans les problèmes d'optimisation et dans l'étude des chaînes de Markov, l'analyse et les probabilités dans les problèmes d'estimation.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire

L'objet de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires et des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$*, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des matrices. L'objectif est d'avoir la possibilité d'utiliser des espaces vectoriels concrets, naturellement isomorphes à* $\mathbf{R}^n$ *et de pouvoir y manipuler les changements de bases, sans introduire les espaces vectoriels abstraits. Cette partie du programme sera ensuite utilisée en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables et en probabilités (chaînes de Markov...).*

1 - Espaces vectoriels réels de dimension finie

Cette partie doit être traitée dans sa plus simple expression. Les notions étudiées en première année sont étendues dans un cadre plus abstrait sans démonstration en s'appuyant sur les exemples de référence listés ci-dessous.

Espace vectoriel sur $\mathbf{R}$. Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe . et d'une bijection de E sur $\mathbf{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.	On se limite par définition au cas de la dimension finie. On illustre ces définitions en liaison avec le programme de première année complété par les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[x]$.
Familles libres, familles génératrices, bases. Base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$. Sous-espace vectoriel. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.	

2 - Endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre. Endomorphisme, isomorphisme. Composée de deux applications linéaires. Noyau et image d'une application linéaire. Rang d'une application linéaire.	Ecriture matricielle.
Théorème du rang. Application à la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.	Résultat admis.
Matrice associée à une application linéaire dans des bases, matrice d'un endomorphisme.	Lien entre le rang d'une matrice et le rang de l'application linéaire associée. Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.

Changement de base, matrice dee passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.	Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Formules de changement de base.	$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\, P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Matrices semblables.	Deux matrices A et B carrées sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. A et B peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

3 - Réduction des matrices carrées

Le paragraphe est essentiellement consacré à l'introduction des matrices diagonalisables. Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est déconseillée. Ces notions seront mises en situation dans l'étude pratique des suites récurrentes linéaires, de systèmes différentiels, de chaînes de Markov, et pour l'utilisation de la matrice hessienne dans les recherches d'extrema.

Spectre d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de ce polynôme.	Aucune connaissance supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est au programme.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de $\mathbf{R}^n$.	
Matrice carrée diagonalisable.	Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Exemples de diagonalisation de matrices carrées. Sur des exemples, application au calcul de puissances n-ièmes d'une matrice carrée. Exemples de calculs de puissances n-ièmes d'une matrice carrée, non nécessairement diagonalisable, à l'aide de la formule du binôme. Application à l'étude de suites récurrentes linéaires.
Toute matrice symétrique est diagonalisable.	Résultat admis.

II - Compléments d'analyse

1 - Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On pourra introduire les systèmes différentiels en utilisant un exemple basé sur la loi de l'offre et la demande.

Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle.	Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Résultat admis.
Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable de taille 2 ou 3.	L'exponentielle de matrice n'est pas au programme.
Comportement asymptotique des trajectoires en fonction du signe des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable. Stabilité des solutions, état d'équilibre.	
Équivalence entre une équation scalaire d'ordre 2 et un système de 2 équations d'ordre 1.	On fait le lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

2 - Compléments sur les suites et les séries

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

a) Comparaison des suites réelles

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes.	Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On réécrira les croissances comparées de première année. On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

b) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Etude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.	On remarquera le cas où f est croissante.
Notion de point fixe d'une application. Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.	On pourra illustrer cette partie du programme avec Python. ▶.

c) Compléments sur les séries

L'étude des séries ne s'applique que dans le cadre de l'étude de variables aléatoires discrètes.

Convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.	Ce résultat pourra être démontré dans le chapitre sur les intégrales généralisées.

Séries à termes positifs. Comparaison des séries à termes positifs dans les cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.	
Exemples d'étude de séries à termes quelconques.	On utilisera la notion de convergence absolue vue en première année. On donne des exemples de sommes télescopiques.

3 - Compléments sur l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle

a) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Fonction négligeable devant une fonction, fonctions équivalentes.	Notations $f = o(g)$ et $f \sim g$ Les théorèmes de croissances comparées vus en première année sont reformulés ici avec les notations de la négligeabilité. Traduction, en termes de négligeabilité et d'équivalence, des limites connues concernant les fonctions usuelles.
Compatibilité de l'équivalence vis-à-vis des opérations suivantes : produit, quotient, composition par une fonction puissance entière.	On mettra en garde contre l'extension abusive à l'addition ou à la composition par d'autres fonctions $(\ln, \exp, \dots)$.

b) Développements limités

*Les développements limités ne seront présentés qu'**à l'ordre au plus 2**. Les développements limités seront par la suite étendus aux fonctions de deux variables.*
Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible.

Développement limité d'ordre 2 (respectivement d'ordre 1) en x_0 d'une fonction de classe C^2 (respectivement de classe C^1) au voisinage de x_0.	Unicité. Formule de Taylor-Young. Résultats admis.
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\epsilon(x-x_0)$, avec $a_2 \neq 0$.	Exemples.
Cas des fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.	Sur des exemples, application à l'étude locale de fonctions.

4 - Intégration généralisée à un intervalle quelconque

Les intégrales généralisées sont introduites dans ce programme comme outil pour l'étude des variables aléatoires à densité. Il s'agit ici d'une part d'étendre la notion d'intégrale à un intervalle quelconque, d'autre part de mettre en place les techniques de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Les résultats de ce paragraphe pourront être admis. À cette occasion, on pourra consolider les acquis de première année concernant l'intégration sur un segment (positivité, techniques de calcul, intégrales comme fonctions de la borne supérieure...).

a) Intégrales sur un intervalle de type $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,+\infty[$

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue sur $[a,+\infty[$.

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et est finie.

Linéarité, positivité, relation de Chasles.

Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) ne seront pratiquées qu'avec des intégrales sur un segment.

Convergence des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

On pourra en déduire la convergence des séries de Riemann $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$.

Extension des notions précédentes aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$.

b) Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si

$$x\longmapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ est majorée sur } [a,+\infty[.$$

De même, si f est continue et positive sur $]-\infty,a]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x\longmapsto\displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty,a]$.

Règles de comparaison dans les cas $f\leqslant g$, $f=o(g)$ et $f\underset{+\infty}{\sim}g$ avec f et g positives au voisinage de $+\infty$.

On adaptera ces propriétés au voisinage de $-\infty$. On utilisera comme intégrales de référence les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (pour $a>0$) et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

c) Convergence absolue

Convergence absolue.

Cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.

La convergence absolue implique la convergence.

Résultat admis.

Extension aux intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$

III - **Probabilités et statistiques**

1 - Statistiques bivariées

On s'appuiera dans ce paragraphe sur des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales (loi d'Okun, corrélation entre données économiques...).

Série statistique à deux variables quantitatives discrètes, nuage de points associé.	
Point moyen du nuage.	Notation $(\bar{x}, \bar{y})$.
Covariance empirique s_{xy}, formule de Koenig-Huygens.	Pour des n uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\quad s_{x,y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Cœfficient de corrélation linéaire empirique r_{xy}, propriétés et interprétation de ce coefficient.	$-1 \leqslant r_{x,y} \leqslant 1$ et interprétation lorsque $\lvert r_{x,y}\rvert = 1$.
Ajustement des moindres carrés, droites de régression.	On pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer. On discutera de la pertinence d'une régression linéaire selon les données observées.

2 - Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$. On commencera par aborder des exemples où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.
Lois marginales, lois conditionnelles.	
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).	On se limitera à des cas simples tels que $X + Y$, XY.
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) de variables aléatoires	$E(g(X,Y)) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P([X = x] \cap [Y = y])$ (sous réserve de convergence absolue). Résultat admis. En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.
Linéarité de l'espérance.	Résultat admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis.
Loi du minimum, du maximum, de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. - Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$.
Formule de Koenig-Huygens. Conséquence.	$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle. Réciproque fausse.
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X, Y)$.
Propriétés.	$\|\rho(X, Y)\| \leqslant 1$. Cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.
Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes. Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	On pourra admettre ce résultat.

3 - Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i]).$$
Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.	
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n. Résultat admis.

Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes. Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Fonctions numériques de deux variables réelles

L'objectif de ce chapitre est d'arriver à une bonne compréhension des problèmes de recherche d'extrema des fonctions de deux variables en faisant le lien avec les résultats concernant la réduction des matrices.

Dans les deux premiers paragraphes, on familiarisera les étudiants avec la notion de fonction de deux variables réelles en évitant tout problème de nature topologique, c'est pourquoi le domaine de définition sera systématiquement $\mathbf{R}^2$.

On introduira la notion de fonction de deux variables réelles à l'aide d'exemples issus d'autres disciplines et on exploitera les visualisations informatiques des surfaces en 3D ou les recherches d'éléments propres de matrices permises par Python.

Tous les résultats concernant les fonctions réelles de deux variables réelles seront admis.

1 - Fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$

Exemples de fonctions réelles de deux variables réelles.	Fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$. Fonctions polynomiales de deux variables réelles.
Distance euclidienne de deux points $\mathbf{R}^2$.	Notation $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big)$.
Continuité d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.	Une fonction réelle f de deux variables réelles, définie sur $\mathbf{R}^2$, est continue en un point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big) < r \Rightarrow \mid f(x, y) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion. On fera le lien avec la continuité des fonctions d'une variable réelle.
Opérations sur les fonctions continues.	Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues sont continus. Les fonctions polynomiales de deux variables réelles sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la composée d'une fonction continue à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue.
Lignes de niveau.	Illustration sur des exemples (Cobb-Douglas etc...).

2 - Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$

Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe C^1. Une fonction de classe C^1 est continue. Opérations sur les fonctions de classe C^1.	Notations $\partial_1 f$, $\partial_2 f$. La détermination de la classe d'une fonction en un point problématique est hors programme.
Gradient de f en un point.	Notation $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$. $f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ $+ \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε continue en (0,0). Résultat non exigible.
Dérivées partielles d'ordre 2. Fonctions de classe C^2. Une fonction de classe C^2 est de classe C^1. Opérations sur les fonctions de classe C^2.	Notations $\partial^2_{1,1} f, \partial^2_{1,2} f, \partial^2_{2,1} f, \partial^2_{2,2} f$ où $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1(\partial_2 f)(x,y)$.
Théorème de Schwarz.	Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, alors pour tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y)$.
Matrice hessienne d'une fonction de deux variables réelles au point (x,y).	Notation $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}$. On remarquera que si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, sa matrice hessienne en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$ est symétrique.

3 - Extrema d'une fonction de deux variables réelles

Dans ce paragraphe, on sensibilisera les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés de $\mathbf{R}^2$. On donnera la définition d'un ensemble borné.
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme et devra toujours être indiquée.
On étendra brièvement les définitions et propriétés concernant la continuité (respectivement le calcul différentiel) à des fonctions définies sur des parties (respectivement parties ouvertes) de $\mathbf{R}^2$.

Maximum, minimum local d'une fonction de deux variables réelles. Maximum, minimum global d'une fonction de deux variables réelles sur une partie de $\mathbf{R}^2$.	
Une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.	Résultat admis.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Point critique.	Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$ admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. On pourra revenir à titre d'exemple sur la détermination des coefficients de la droite de régression.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local.	Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en (x_0, y_0).
Point col (ou point selle).	Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un point col pour f.

II - Probabilités

1 - Graphes probabilistes (chaînes de Markov)

Tous les résultats de cette section seront admis.

Graphe probabiliste. Matrice de transition.	On commence par l'exemple simple d'un graphe à deux ou trois états. Les sommets du graphe sont numérotés à partir de 1.
Chaîne de Markov associée (X_n).	X_n est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des sommets du graphe.
Etats de la chaine de Markov.	Le n-ème état de la chaîne de Markov, noté V_n, est la matrice ligne $(P(X_n = 1), ..., P(X_n = r))$.
Si $M = (m_{i,j})$, on a la formule : $P(X_n = j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} P(X_{n-1} = i)$.	Les coefficients de la matrice de transition sont des probabilités conditionnelles.
Relation de récurrence matricielle entre les états successifs de la chaîne de Markov.	$V_n = V_{n-1} M$. On pourra introduire l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ $\mu : W \mapsto WM$ et remarquer que la matrice de μ dans la base canonique est ${}^tM$.
Etat stable.	$V = VM$. La matrice des coordonnées de V dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (soit ${}^tV$) est un vecteur propre de ${}^tM$ relatif à la valeur propre 1. On donnera l'interprétation probabiliste de l'état stable.

Etude sur des exemples des différents comportements possibles d'un graphe probabiliste à deux états.	Savoir-faire non exigible.

2 - Variables aléatoires à densité

On se limitera dans ce chapitre à des densités ayant des limites finies à gauche et à droite, en tout point de $\mathbf{R}$.

a) Définition des variables aléatoires à densité

Définition d'une variable aléatoire à densité.	On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.
Toute fonction f_X à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points, est une densité de X.	Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t$.
Caractérisation de la loi d'une variable à densité par la donnée d'une densité f_X.	
Toute fonction f positive, continue sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$ est la densité d'une variable aléatoire.	Résultat admis.
Si f est une densité de probabilité, $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 en tout point où f est continue.	En un tel point, $F'(x) = f(x)$. Résultat admis.
Transformation affine d'une variable à densité.	Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et une densité de $aX + b$ $(a \neq 0)$.

b) Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance.	Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $\mathrm{E}(X)$ est égale à cette intégrale. Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.
Variable aléatoire centrée.	

Théorème de transfert pour l'espérance.	Si X est une variable aléatoire admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a,b[$, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument et dans ce cas : $E(g(X)) = \displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\ \mathrm{d}t$. Résultat admis.
Variance, écart-type, variables aléatoires centrées réduites.	Exemples de variables aléatoires n'admettant pas de variance.

c) Lois à densité usuelles

Pour chacune de ces lois, on donnera des contextes dans lesquels on les utilise.

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Loi normale centrée réduite.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ On pourra démontrer en exercice que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ converge.
Loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance. Variance.	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.	$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.	Résultat admis.

d) Exemples simples de transferts

On réinvestira dans ce paragraphe les lois usuelles à densité.

Calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les candidats devront savoir retrouver les densités de $aX+b$ $(a \neq 0)$, X^2, $\exp(X)$, ... Loi de $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$, où Y suit une loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0,1[$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois uniformes.	Si $a < b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \Longleftrightarrow Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si $a \neq 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

3 - Compléments sur les variables aléatoires réelles quelconques

La définition de l'espérance ou des moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire quelconque est hors d'atteinte dans le cadre de ce programme et toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques. En particulier, le théorème de transfert ci-dessous permet de calculer l'espérance de $g(X)$ dans le cas où X est à densité.

Tous les résultats de cette section seront admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles quelconques.	Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])P([Y \in J])$ pour tous intervalles réels I et J. Généralisation à un ensemble fini ou une suite de variables aléatoires réelles quelconques.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n.
Espérance d'une somme de variables aléatoires.	Si X et Y admettent une espérance, $X+Y$ admet une espérance et $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires.
Croissance de l'espérance.	Si $P([X \leqslant Y]) = 1$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.	Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance, $$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$ Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = \|X\|^r$, $r \in \mathbf{N}^*$.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, $$\forall \varepsilon > 0, \quad P([\|X - E(X)\| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.	Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P([\|\overline{X}_n - m\| \geqslant \varepsilon]) = 0$.

c) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers une variable aléatoire X.	Une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout réel x où F_X est continue. Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
Caractérisation dans le cas où les X_n, $n \in \mathbf{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{Z}$.	$(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si : $$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{n \to +\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$$ Résultat admis. Application à la convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On observera sur des exemples la convergence en loi d'une chaîne de Markov (dont le graphe sous-jacent est complet) vers la loi décrite par son état stable.

Théorème limite central.	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ associées aux variables $\overline{X}_n = \dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'où, on a pour tout (a,b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$. Résultats admis.
Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.	Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

5 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$). Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), c'est-à-dire à en obtenir une valeur approchée, à partir d'un échantillon de données $x_1,\ldots,x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1,\ldots,X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Un estimateur se définit donc de l'intention de fournir une estimation. Cette intention est garantie le plus souvent par un résultat de convergence probabiliste (lorsque n tend vers $+\infty$) vers le paramètre à estimer (convergence de l'estimateur). Ceci sort des objectifs du programme mais pourra être commenté sur les exemples proposés.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ où $\varphi(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et $(x_1,\dots,x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1,\dots,X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1,\dots,X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ observé.
Exemples simples d'estimateurs.	Exemple de la moyenne empirique $\overline{X}_n = \dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$. Estimateur du maximum de vraisemblance : on ne fera pas de développement théorique, mais on en expliquera le principe et on l'instanciera sur les lois de Bernoulli et de Poisson. ▶

b) Estimation par intervalle de confiance

La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne θ avec une probabilité minimale donnée. On ne considère dans ce paragraphe que des intervalles de confiance de l'espérance mathématique m faisant intervenir l'estimateur $\overline{X}_n$. Ce paragraphe ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique.

Recherche d'un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1-\alpha$ à partir de $\overline{X_n}$ et à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.	▶
Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.	On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique $\overline{S}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2}{n}$. ▶
Intervalle de confiance asymptotique : $P\left(\left[\overline{X}_n - t_\alpha\dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + t_\alpha\dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1-\alpha$ où t_α est le quantile d'ordre $1-\dfrac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$	Ce résultat est une conséquence direct du théorème limite central. Il n'est pas exigible en l'état. On pourra mentionner le cas particulier $\alpha = 0,05$. ▶

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du troisième semestre.

1 - Bases de données

L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.
L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On introduira les concepts à l'aide d'exemples simples issus de contextes appropriés (fichier clients, gestion des stocks, gestion du personnel ...)

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire « PRIMARY KEY », clef étrangère « FOREIGN KEY », schéma relationnel.	
Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.	On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier « INTEGER », chaîne « TEXT ».
Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.
Opérateurs arithmétiques $+$, $-$, $*$.	
Opérateurs de comparaison : $=, <>, <, <=, >, >=$.	
Opérateurs logiques : « AND », « OR », « NO ».	

a) Commandes exigibles

« WHERE »	
« SELECT nom_de_champ FROM nom_de_table ».	Sélection de données dans une table.
« INSERT INTO nom_de_table ».	Insertion de données dans une table. On pourra utiliser « VALUES (élément1, élément2,...)".
« DELETE FROM nom_de_table ».	Suppression de données d'une table.
« UPDATE nom_de_ table ».	Mise à jour de données d'une table.

« SELECT* FROM nom_de_table_1 INNER JOIN nom_de_table_2 ».	Réalisation d'une jointure. On pourra ajouter une condition « ON Φ »dans le cas où Φ est une conjonction d'égalités. Aucune autre notion de jointure n'est dans ce programme.
« CREATE TABLE nom_de_table ».	Création d'une table.

b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union « UNION », intersection « INTERSECTION », différence « EXCEPT ».

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min « MIN », max « MAX », somme « SUM », moyenne « AVG », comptage « COUNT ».

Les commandes « DISTINCT », « ORDER BY »

2 - Equations et systèmes différentiels

L'objectif est d'illustrer les concepts vus dans le cours de mathématiques. On pourra dégager sur des exemples simples des notions qualitatives, mais aucune technicité n'est attendue. La discrétisation d'une équation différentielle n'est pas au programme. On pourra utiliser le solveur scipy.integrate.odeint ; la maîtrise d'un tel outil n'est pas exigible.

Représentations graphiques de trajectoires.	Sur des exemples en lien avec le programme : Interprétation des paramètres. Influence des conditions initiales. On observera le phénomène de convergence vers un équilibre.

3 - Statistiques descriptives bivariées

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage. Covariance empirique, cœfficient de corrélation empirique, droites de régression.	On tracera le nuage de points et les droites. de régression et on pourra effectuer des prétransformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer.

II - **Programme du quatrième semestre.**

1 - Chaînes de Markov

Ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes, de revisiter les notions de programmation et de représentation de données par un graphe fini, qui sont vues en première année, ainsi que d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire étudiés au troisième semestre.

Matrice de transition. Étude sur des exemples simples. Etat stable. Comportement limite.	On pourra étudier par exemple l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus en assurances. Simulation et mise en évidence d'états stables. On observera la convergence en loi d'une chaîne de Markov (sur un graphe complet) vers son état stable.

2 - Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance

Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles (simple comparaison de valeurs numériques) ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Intervalle de confiance asymptotique obtenu avec le théorème limite central pour estimer le paramètre d'une loi de Bernoulli.	Résultat admis On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe II
Programmes de mathématiques approfondies - informatique

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques approfondies – informatique de la classe d'ECG 1ère année

Table des matières

Introduction

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, ...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.

- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.
- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filiére EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe terminale. Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de quatre points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordée d'abord par le calcul matriciel, outil indispensable pour le calcul multidimensionnel, puis par les espaces vectoriels. La pratique de l'algèbre linéaire permet de développer chez l'étudiant des capacités d'abstraction, mais aussi de renforcer sa démarche logique indispensable en mathématiques.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples « pathologiques ». On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse ou d'outils de calculs en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et le cours de mathématiques qu'ils auront choisi en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités au lycée, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus. Les nombres complexes n'étant abordés que dans le cours optionnel de mathématiques expertes, ne font plus partie du programme.

L'étude des variables aléatoires discrètes infinies en première année nécessite l'introduction des séries. Dans un souci d'allègement de la première année, en continuité avec les programmes du lycée, le concept de variable aléatoire à densité ne sera présenté qu'en deuxième année. Cependant les intégrales généralisées seront présentées en analyse dès la première année.

L'algèbre linéaire est abordée, au premier semestre, par le biais du calcul : calcul matriciel, systèmes d'équations linéaires. Des rudiments de vocabulaire général sur les espaces vectoriels sont introduits lors du premier semestre. Ce choix a pour ambition de familiariser les étudiants avec le calcul multidimensionnel afin de les préparer à l'introduction de la notion abstraite d'espace vectoriel, qui sera étudiée essentiellement au second semestre.

En analyse, le premier semestre permet de consolider et approfondir des notions familières aux étudiants, comme les suites, les intégrales et les dérivées. Le second semestre généralise les notions du premier semestre en introduisant les séries et les intégrales généralisées, dans l'objectif de l'étude des probabilités (les variables aléatoires à densité ne seront abordées qu'en deuxième année).

Pour les probabilités, on se place sur les espaces probabilisés finis au premier semestre, puis plus généraux au second semestre.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus, des applications ou des exemples d'activités.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

La plupart des résultats mentionnés dans le programme seront démontrés. Pour certains marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main par les étudiants des techniques usuelles et bien délimitées inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique. Le langage de référence choisi pour ce programme est Python.

Enseignement de mathématiques du premier semestre

I - **Raisonnement et vocabulaire ensembliste**

1 - Éléments de logique

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire des raisonnements mathématiques, mais tout exposé théorique est exclu. Les notions de ce paragraphe pourront être présentées en contexte au cours du semestre, évitant ainsi une présentation trop formelle.

Connecteurs : et, ou, non, implication, réciproque, contraposée.
Quantificateurs : $\forall$, $\exists$.

On présentera des exemples de phrases mathématiques utilisant les connecteurs et les quantificateurs, et on expliquera comment écrire leurs négations.

2 - Raisonnement par récurrence et calcul de sommes et de produits

Emploi du raisonnement par récurrence.

Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Formules donnant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

Les formules donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ seront vues en exercice. Elles ne sont pas exigibles.

Notations $\sum$, $\prod$.

Les étudiants doivent savoir employer les notations $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\displaystyle\sum_{i \in A} u_i$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^2$. $\boxed{\blacktriangleright}$

Définition de $n!$.

Formule du binôme, triangle de Pascal.

On pourra introduire les coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal

3 - Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, en vue de préparer l'étude des chapitres d'algèbre linéaire et de probabilités, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Appartenance. Inclusion. Notations $\in$, $\subset$.
Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

En lien avec le programme de terminale, on montrera que le nombre $\displaystyle\binom{n}{p}$ est aussi le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire. $\boxed{\blacktriangleright}$

Formules $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
$\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Complémentaire. Notation $\overline{A}$.

La notation $\overline{A}$ est à privilégier. En cas d'ambiguïté, on utilisera la notation $\complement_E A$.

Union, intersection. Notations $\bigcap$, $\bigcup$.
Distributivité. Lois de Morgan.

On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels.

Définition du produit cartésien d'ensembles.

On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition. Composée de deux applications.

Restriction et prolongement d'une application.	Ces deux notions ne seront introduites que dans les cours d'algèbre linéaire et d'analyse.
Applications injectives, surjectives, bijectives.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - **Polynômes**

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales. Les démonstrations des résultats de ce paragraphe ne sont pas exigibles.

Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Opérations algébriques.	
Degré.	Par convention $\deg(0) = -\infty$.
Ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Division euclidienne.	Multiples et diviseurs.
Racines, ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité par factorisation d'une puissance de $(x - a)$.	Cas des polynômes de degré 2.
Formule de Taylor pour un polynôme	
Exemples simples de factorisation dans $\mathbf{R}[x]$.	On énoncera le résultat général sans démonstration.

III - **Algèbre linéaire**

L'objet de ce chapitre est la mise en place de l'outil vectoriel dès le premier semestre, afin de confronter rapidement les étudiants aux notions étudiées dans le cours d'algèbre linéaire.

Dans un premier temps, on présentera la notion de matrice et l'on familiarisera les étudiants à la manipulation de ces objets avant d'en aborder les aspects vectoriels.

L'étude de ce chapitre pourra être menée en lien avec l'algorithmique en ce qui concerne le calcul matriciel. ▶

1 - Calcul matriciel

a) Matrices rectangulaires

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$.	
Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$.	Addition, multiplication par un scalaire. ▶
Produit matriciel.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. ▶
Transposée d'une matrice. Transposition d'un produit.	Notation ${}^tA$.

b) Cas des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{R}$.
Matrices triangulaires, diagonales, symétriques, antisymétriques.
Matrices inversibles, inverse d'une matrice.

On admettra que pour une matrice carrée, un inverse à gauche ou à droite est l'inverse.

Inverse d'un produit. Transposition de l'inverse.

Formule donnant l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2.
Inversibilité d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.

2 - Systèmes linéaires

Tout développement théorique est hors programme.

Définition d'un système linéaire.

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

La méthode sera présentée à l'aide d'exemples.
On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_j \leftrightarrow L_i$, $L_i \leftarrow aL_i + bL_j \quad (a \neq 0, i \neq j)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

Un système linéaire admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Un système linéaire homogène admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Écriture matricielle d'un système linéaire.

Calcul de l'inverse de la matrice A par la résolution du système $AX = Y$.

3 - Introduction aux espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Cette première approche des espaces vectoriels permet d'introduire le vocabulaire et sera accompagnée de nombreux exemples.

Il sera possible, à l'occasion d'autres chapitres en analyse ou probabilité, de rappeler la structure d'espace vectoriel des ensembles les plus courants, afin de familiariser les étudiants avec le vocabulaire et les notions fondamentales, avant une étude plus approfondie des espaces vectoriels au second semestre.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$. *Les notions de corps, d'algèbre et de groupe sont hors programme.*

Structure d'espace vectoriel.
Sous-espaces vectoriels.

Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces $\mathbf{R}^n$, espaces de polynômes, espaces de matrices), de l'analyse (espaces de suites, de fonctions). On distinguera les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Combinaisons linéaires.

On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.
Une famille finie d'un espace vectoriel E est la donnée d'une liste finie $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de cette famille est n.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base.	On se limitera à des familles et des bases de cardinal fini.
Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.	Exemple de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$.

IV - **Suites de nombres réels**

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants dès le premier semestre avec des méthodes d'analyse. La construction de $\mathbf{R}$ *est hors programme et le théorème de la borne supérieure est admis.*

1 - Vocabulaire sur l'ensemble R des nombres réels

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	
Majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbf{R}$.	Quand il existe, le maximum de A coincide avec la borne supérieure de A.
Théorème de la borne supérieure.	Résultat admis.
Partie entière d'un réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$. La notation $E(.)$ est réservée à l'espérance mathématique.

2 - Exemples de suites réelles

Suites arithmético-géométriques.	On se ramenera au cas d'une suite géométrique.
Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 à coefficients réels. Équation caractéristique. On se limitera aux équations caractéristiques à solutions réelles.	Cette partie pourra être l'occasion d'illustrer, dans un cas concret, les notions de famille libre, génératrice et de base.

3 - Convergence des suites réelles - Théorèmes fondamentaux

On utilisera la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer le comportement des suites. ▶

Limite d'une suite, suites convergentes.	On dit que (u_n) converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux. On donnera une définition quantifiée de la limite ℓ (traduction en ε, n_0) sans en faire une utilisation systématique.
Généralisation aux suites tendant vers $\pm\infty$.	
Unicité de la limite. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Suites monotones, croissantes, décroissantes, suites adjacentes.	

Théorème de limite monotone.	Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étant la borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite. Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.	
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.	
Croissances comparées.	Comparaisons des suites $(n!)$, (n^a), (q^n), $(\ln(n)^b)$.

V - **Fonctions réelles d'une variable réelle**

En analyse, on évitera la recherche d'hypothèses minimales, tant dans les théorèmes que dans les exercices et problèmes, préférant des méthodes efficaces pour un ensemble assez large de fonctions usuelles.

Pour les résultats du cours, on se limite aux fonctions définies sur un intervalle de **R**. *Les étudiants doivent savoir étudier les situations qui s'y ramènent simplement.*

L'analyse reposant largement sur les inégalités, on les pratiquera régulièrement à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration n'est exigible des étudiants.

1 - Limite et continuité d'une fonction d'une variable en un point

Définition de la limite et de la continuité d'une fonction d'une variable en un point. Unicité de la limite. Limites à droite et à gauche. Extension au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.	On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur I, x_0 étant un élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, f est continue en x_0, sinon f se prolonge en une fonction continue en x_0.
Opérations algébriques sur les limites. Compatibilité avec la relation d'ordre. Existence d'une limite par encadrement. Prolongement par continuité en un point.	
Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite réelle définie sur I et tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Limite d'une fonction composée.	La caractérisation séquentielle de la limite n'est pas au programme.

2 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section. Les fonctions exponentielle, puissance et logarithme ont été vues *en terminale. Les fonctions trigonométriques ne sont pas supposées connues. L'existence des fonctions cosinus et sinus n'est pas un enjeu du programme. On interprétera géométriquement leurs propriétés à l'aide du cercle trigonométrique.*

Fonctions de référence	exp, ln, $x \mapsto x^\alpha$, cos, sin, tan, arctan, valeur absolue et partie entière.
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.	Aucune autre formule n'est exigible. Les formules produit seront vues en exercice et mises en application.
Croissances comparées	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a \lvert\ln(x)\rvert^b$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \lvert x\rvert^a \mathrm{e}^{bx}$.
Fonctions paires, impaires, périodiques.	
Fonctions majorées, minorées, bornées, monotones.	
Théorème de limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle, opérations algébriques, composition. Théorème des valeurs intermédiaires.	
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations $\max\limits_{[a,b]} f$ et $\min\limits_{[a,b]} f$.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation. On utilisera ce résultat pour l'étude des équations du type $f(x) = k$. En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. ▶
Représentation graphique de la fonction réciproque.	

3 - Dérivation

Dérivées à gauche et à droite. Dérivée en un point. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit, dérivée d'une composée. Exemples.	Interprétation graphique. ▶
Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dérivée. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivation des fonctions réciproques.	Notation f'.
Dérivée d'un polynôme et des fonctions de référence.	

Théorème de Rolle.	
Égalité et inégalités des accroissements finis.	Si $\vert f'\vert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \vert f(b) - f(a)\vert \leqslant k\vert b-a\vert.$ Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu. $\boxed{\blacktriangleright}$
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par l'étude de la dérivée.	Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Théorème du prolongement de la dérivée.	Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, continue en a, et si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell$, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

4 - Intégration sur un segment

La construction de l'intégrale de Riemann est hors programme.

Définition de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment comme aire sous la courbe. On généralise à une fonction de signe quelconque sans soulever de difficulté théorique.	Illustration par la méthode des rectangles. $\boxed{\blacktriangleright}$
Sommes de Riemann	La convergence des sommes de Riemann ne sera démontrée que dans le cas d'une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$.
Linéarité, relation de Chasles, positivité et croissance.	
Cas d'une fonction continue, positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle.	Si f est continue sur $[a,b]$ et $a \leqslant b$, $\left\vert \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right\vert \leqslant \int_a^b \vert f(t)\vert \mathrm{d}t.$
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. $x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de f.	Résultat admis. Pour toute primitive F de f : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a),$ $\boxed{\blacktriangleright}$ On pourra vérifier ce résultat sur des exemples en informatique.
Intégration par parties.	
Changement de variable.	Les changements de variable non affines doivent être indiqués aux candidats. On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.

VI - **Probabilités sur un ensemble fini**

L'objectif de cette première approche est de mettre en place un cadre simplifié mais formalisé dans lequel on puisse mener des calculs de probabilités sans difficulté théorique majeure.

Dans la continuité du programme de terminale, l'étude préalable du cas fini permettra de consolider les acquis et de mettre en place, dans des situations simples, les concepts probabilistes de base, en ne *faisant appel qu'aux opérations logiques et arithmétiques élémentaires. C'est pourquoi, pour le premier semestre, on se restreindra à un univers Ω fini, muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Le terme tribu ne sera pas employé.*

On évitera pour cette première approche un usage avancé de la combinatoire, et l'on s'attachera à utiliser le vocabulaire général des probabilités.

1 - Généralités

a) Observation d'une expérience aléatoire - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables, événements. Opérations sur les événements, événements incompatibles (ou « disjoints »).	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples. On fera le lien entre ces opérations et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(A_i)_{i\in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les conditions deux suivantes : • $\forall i, j \in I$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ • $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

b) Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application additive P à valeurs dans $[0, 1]$ et vérifiant $P(\Omega) = 1$. Cas de l'équiprobabilité.
Formule de Poincaré ou du crible pour deux et trois événements.	

c) Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A. P_A est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Formule des probabilités composées.	• Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. • Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors : $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\,P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
Formule des probabilités totales	Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$. Si de plus, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $P(A_i) \neq 0$, on a : $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

d) Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.	Si $P(A) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. On remarquera que la notion d'indépendance est relative à la probabilité.
Indépendance mutuelle de n événements. Si n événements A_1, ..., A_n sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.	

2 - Variables aléatoires réelles finies

On introduit dans cette section la notion de variable aléatoire réelle définie sur un univers fini. Ces variables aléatoires sont alors à valeurs dans un ensemble fini, ce qui simplifie la démonstration des formules.

Une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbf{R}$.	On adoptera les notations habituelles telles que $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet associé à une variable aléatoire.	
Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.	La loi de X est la donnée de $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur $X(\Omega)$. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limitera à des cas simples, tels que $g(x) = ax + b$, $g(x) = x^2$, ...
Espérance d'une variable aléatoire.	$E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.
Linéarité de l'espérance. Croissance de l'espérance	$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
Théorème de transfert.	$E(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire. Cas particulier où $V(X) = 0$.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX + b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.

3 - Lois usuelles $\boxed{\blacktriangleright}$

Variable aléatoire certaine.	
Loi de Bernoulli, espérance et variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. La variable indicatrice $\mathbf{1}_A$ de l'événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On pourra faire le lien avec la formule du binôme de Newton et les propriétés des coefficients binomiaux.

Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

Enseignement de mathématiques du second semestre

I - **Algèbre linéaire**

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir et compléter les notions vues au premier semestre.

1 - Espaces vectoriels de dimension finie

Dans cette section, aucune démonstration n'est exigible.

Espaces admettant une famille génératrice finie. Existence de bases. Si L est libre et si G est génératrice, le cardinal de L est inférieur ou égal au cardinal de G.	
Dimension d'un espace vectoriel.	Notation $\dim(E)$.
Caractérisation des bases.	Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre ou génératrice de cardinal n est une base.
Rang d'une famille finie de vecteurs. Théorème de la base incomplète.	
Dimension d'un sous-espace vectoriel.	Si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

2 - Compléments sur les espaces vectoriels

Dans cette section, aucune démonstration n'est exigible.

Somme de deux sous-espaces vectoriels.	
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.	Tout vecteur de la somme se décompose de manière unique.
Existence d'un supplémentaire en dimension finie.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont supplémentaires, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. Caractérisation de $E = F \oplus G$ par la dimension et l'intersection de F et G.	Dimension d'un supplémentaire.
Concaténation de bases de deux sous-espaces vectoriels.	Caractérisation de sommes directes par concaténation de bases.

3 - Applications linéaires

a) Cas général

Définition d'une application linéaire de E dans F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.	On s'appuiera sur des exemples concrets, par exemple l'application $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X \longmapsto MX$, dont on soulignera les propriétés.
Composée de deux applications linéaires.	
Isomorphismes.	Un espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Endomorphismes, espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E.	Puissances d'un endomorphisme.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Projecteurs associés à deux espaces supplémentaires.	Caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.

b) Cas de la dimension finie

Rang d'une application linéaire.	Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Lien entre recherche de l'image et résolution de système.
Formule du rang.	Si E et F sont des espaces vectoriels, E étant de dimension finie, et une application linéaire u de E dans F, $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\ u) + \dim(\mathrm{Im}\ u)$. Application à la caractérisation des isomorphismes. Application : le noyau d'une forme linéaire non-nulle est un hyperplan.

c) Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans des bases.	Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$. Matrice de $f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X \longmapsto MX$ relative aux bases canoniques. Matrice d'une forme linéaire.
Interprétation matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Matrices colonnes des coordonnées d'un vecteur dans deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Formule $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$
Lien du produit matriciel avec la composition des applications linéaires.	Si $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F et G, f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.
Rang d'une matrice.	Pour toutes bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est égal au rang de f.

Une matrice et sa transposée ont même rang.	Résultat admis.

d) Cas des endomorphismes et des matrices carrées

Matrice d'un endomorphisme f de E dans la base $\mathcal{B}$.	Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Formule du binôme pour deux endomorphismes ou deux matrices carrées qui commutent.	
Lien entre les isomorphismes de E et les matrices inversibles.	On pourra démontrer que pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'inverse à gauche est également un inverse à droite.
Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice carrée. Polynôme annulateur.	Exemples de calcul d'isomorphismes réciproques, d'inverses de matrices et de puissances k-ème d'une matrice par utilisation d'un polynôme annulateur. Toute théorie générale sur les polynômes annulateurs est exclue.

II - **Compléments d'analyse**

1 - Étude asymptotique des suites

Suite négligeable.	Notation $u_n = o(v_n)$. On présentera à nouveau les croissances comparées vues au premier semestre.
Suites équivalentes.	Notation $u_n \sim v_n$. $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

2 - Comparaison des fonctions d'une variable au voisinage d'un point

Fonction négligeable au voisinage de x_0. Notation $f = o(g)$.	On revient sur la croissance comparée $\lim\limits_{x \to 0} x^a \lvert\ln(x)\rvert^b$
Fonctions équivalentes au voisinage de x_0.	Notation $f \underset{x_0}{\sim} g$. $f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$.
Extension au cas $x_0 = \pm\infty$.	On revient sur les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \lvert x\rvert^a \mathrm{e}^{bx}$
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et l'élévation à une puissance.	

3 - Séries numériques

Convergence d'une série, somme et reste d'une série convergente.	On pourra utiliser des représentations graphiques pour conjecturer la nature d'une série. ▶

Combinaison linéaire de séries convergentes.

Convergence des séries à termes positifs.

Convergence des séries à termes positifs dans les cas $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \sim v_n$.

Résultat analogue pour les séries à termes négatifs. Résultats admis.

Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute série absolument convergente est la différence de deux séries à termes positifs convergentes.

Convergence des séries dans le cas $u_n = o(v_n)$ où (v_n) est une série convergente à termes positifs.

Résultat admis.

Convergence des séries de Riemann.

Convergence et formules de sommation des séries géométriques et de leurs deux premières dérivées.

Série exponentielle.

$\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Ce résultat pourra être admis ou démontré ultérieurement à l'aide de la formule de Taylor. $\boxed{\blacktriangleright}$

Exemples d'étude de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n).

4 - Intégrales sur un intervalle quelconque

On évitera toute technicité dans ce chapitre dont l'objectif est d'introduire les outils utiles à l'étude des variables aléatoires à densité.

Intégration sur un intervalle semi-ouvert.
Convergence de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b[$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$.

On dira que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.

On pose alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \mapsto b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Règles de calcul sur les intégrales convergentes, linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalités.
Cas d'une fonction continue, positive sur $[a, b[$ et d'intégrale nulle.

Cas des fonctions positives.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si
$x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

Théorèmes de convergence pour f et g positives au voisinage de b, dans les cas où $f \leqslant g$ et $f \underset{b}{\sim} g$.

Théorème analogue pour des fonctions f et g négatives au voisinage de b. Théorèmes admis.

Définition de la convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

On remarquera que toute fonction continue est la différence de deux fonctions continues positives.

Théorèmes de convergence dans le cas $f = o(g)$ avec g positive au voisinage de b.

Théorème admis.

Extension des notions précédentes aux intégrales sur un intervalle quelconque.

Brève extension aux fonctions définies et continues sur $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

Pratique de l'intégration par parties pour les intégrales sur un intervalle quelconque.

L'intégration par parties sera pratiquée pour des intégrales sur un segment, on effectuera ensuite un passage à la limite.

Changement de variables.

Si f est continue sur $]a, b[$, si φ est une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe C^1, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales.
Énoncé analogue dans le cas où φ est décroissante.
Les changements de variables non affines devront être indiqués aux candidats et ne pas présenter de difficultés techniques.

5 - Dérivées successives

Fonction p fois dérivable en un point.

Notation $f^{(p)}$.

Fonctions de classe C^p, de classe C^∞ sur un intervalle. Opérations algébriques, formule de Leibniz. Théorème de composition.

La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

6 - Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Ces formules seront données à l'ordre n pour une fonction de classe C^∞.

7 - Développements limités

L'étude des développements limités ne constitue pas une fin en soi et l'on se gardera de tout excès de technicité dans ce domaine. La composition des développements limités n'est pas au programme. On se limitera, en pratique, à des développements limités au voisinage de 0.

Définition d'un développement limité.	On fera le lien entre un développement limité à l'ordre 1 et la valeur de la dérivée. On pourra introduire et manipuler la notation $x^n\varepsilon(x)$ avant l'utilisation éventuelle de la notation $o(x^n)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe C^∞. Application de la formule de Taylor-Young au développement limité de fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, sinus et cosinus). Somme et produit de développements limités.	Résultat admis. Unicité du développement limité.
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1x + a_kx^k + x^k\epsilon(x), k \geq 2$ et $a_k \neq 0$	La forme du graphe au voisinage d'un point dépend principalement du premier terme non linéaire du développement limité. Exemples avec $k = 2$ et $k = 3$

8 - Extremum

Pour préparer l'introduction des notions de topologie du programme de deuxième année, on insistera sur la différence entre la recherche d'extremum sur un segment et la recherche d'extremum sur un intervalle ouvert. On n'étudiera aucun exemple de fonction $\mathcal{C}^1$ sans être $\mathcal{C}^2$.

Toute fonction continue sur un segment admet des extrema globaux sur ce segment.	
Dans le cas d'une fonction de classe C^1 : condition nécessaire d'existence d'un extremum local sur un intervalle ouvert. Définition d'un point critique.	On pourra montrer que le résultat tombe en défaut lorsque l'intervalle de définition n'est pas ouvert.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local en un point critique pour une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert.	Ce résultat sera démontré grâce au développement limité à l'ordre 2.

9 - Fonctions convexes

Tous les résultats de cette section seront admis. On n'étudiera aucun exemple de fonction convexe $\mathcal{C}^1$ sans être $\mathcal{C}^2$.

Définition des fonctions convexes, fonctions concaves.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ tels que $t_1+t_2 = 1$, $$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2).$$ Interprétation géométrique. $\boxed{\blacktriangleright}$
Généralisation de l'inégalité de convexité.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1.	Les étudiants devront savoir que si f est de classe C^1, alors f est convexe si et seulement si l'une des deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • C_f est au-dessus des tangentes.
Caractérisation des fonctions convexes et concaves de classe C^2.	

Condition suffisante de minimum global en un point critique d'une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert
Point d'inflexion.

10 - Graphes de fonctions

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions. Allure locale du graphe (tangentes). Convexité. Asymptotes éventuelles.

On pourra étudier la position d'une courbe par rapport à une asymptote (éventuellement oblique). Les branches paraboliques ne sont pas au programme.
Exemples de points d'inflexion. ▶

III - Probabilités sur un ensemble quelconque

Dans ce second temps de l'étude des probabilités, le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.

1 - Espace probabilisé

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.

L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union et intersection dénombrable, par passage au complémentaire.
Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.

Une probabilité est une application P définie sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des évenements à valeurs dans $[0, 1]$, σ-additive telle que $P(\Omega) = 1$.
Notion d'espace probabilisé.

Notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Théorème de la limite monotone.

• Soit (A_n) une suite d'événements, croissante pour l'inclusion. On a :
$$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(A_n\right).$$
• Soit (A_n) une suite d'événements, décroissante pour l'inclusion. On a :
$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(A_n\right).$$

Conséquences du théorème de la limite monotone.

Pour toute suite (B_k) d'événements,
• $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)$.
• $P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right)$.
Les démonstrations de ces formules ne sont pas exigibles.

Propriétés vraies presque sûrement. Événement négligeable, événement presque sûr.	On pourra donner comme exemple d'événement négligeable la réalisation d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE ou FACE.
Notion de probabilité conditionnelle conditionnée par un évènement de probabilité non nulle.	Si A vérifie $P(A) \neq 0$, alors $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un espace probabilisé.
Formule des probabilités totales.	Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B on a : $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$
Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.	

2 - Variables aléatoires réelles discrètes

On commencera cette section en expliquant comment les résultats vus précédemment se prolongent dans le cadre général. On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.	Une fonction $X : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire discrète lorsque : — $X(\Omega) = \{u_i\}_{i\in I}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$; — pour tout $i \in I, [X = u_i]$ est un événement.
Loi d'une variable aléatoire discrète.	La loi de X est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	
Indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes.	Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes (mutuellement) lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ on a : $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$
Espérance d'une variable aléatoire.	Quand $X(\Omega)$ est infini, X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Cette valeur ne dépend pas de l'indexation de $X(\Omega)$ (admis).
Linéarité de l'espérance. Croissance de l'espérance.	$E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$. Résultat admis.

Existence d'une espérance par domination.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant $0 \leqslant \lvert X\rvert \leqslant Y$, et si Y admet une espérance, alors X admet également une espérance. Dans ce cas, $\lvert E(X)\rvert \leqslant E(Y)$. Résultat admis.
Théorème de transfert.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$ est absolument convergente, et alors $$E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X=x).$$ Cette valeur ne dépend pas de l'indexation de $X(\Omega)$. Théorème admis.
Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $V(X)$ et $\sigma(X)$.
Calcul de la variance. $V(aX+b) = a^2V(X)$.	Formule de Koenig-Huygens : $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$ $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite.
Cas particulier où $V(X)=0$.	
Introduction à la notion de fonction de répartition.	F_X est définie sur $\mathbf{R}$ par : $F_X(x) = P(X \leq x)$.

3 - Lois de variables aléatoires discrètes usuelles

L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. On revisitera les lois usuelles du premier semestre. $\boxed{\blacktriangleright}$

Retour sur les variables aléatoires certaines.	Fonction de répartition.
Retour sur les variables de Bernoulli.	Fonction de répartition.
Loi géométrique (rang d'apparition d'un premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Définition, espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, pour tout nombre entier naturel non nul k, $$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}.$$
Loi de Poisson : définition, espérance, variance	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $\boxed{\blacktriangleright}$

4 - Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Caractérisation de la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.	La loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée des valeurs $P([X=x]\cap[Y=y])$ pour tout $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Retour sur l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y discrètes sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	• Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. • Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).	On se limitera à des cas simples tels que $\min(X, Y),\ \max(X, Y),\ X + Y$.
Espérance de $Z = g(X, Y)$ et théorème de transfert.	Sous réserve de convergence absolue : $$E(Z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y]).$$ Résultat admis, qui peut a posteriori justifier la linéarité de l'espérance.
Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. On pourra admettre ce résultat.

5 - Convergences et approximations

Il s'agit dans cette partie de familiariser les étudiants avec ces notions, sans définir la convergence en probabilité ni la convergence en loi.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour les variables aléatoires discrètes.	Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout $\lambda > 0$: $$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda}.$$ Pour toute variable aléatoire X admettant espérance et variance, pour tout $\varepsilon > 0$: $$P(\lvert X - E(X)\rvert \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Loi faible des grands nombres.	Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi qui admettent une espérance m et une variance, et si $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left\|\overline{X_n} - m\right\| \geq \varepsilon\right) = 0.$$ ▶ La loi faible des grands nombres appliquée à des variables de Bernoulli permet de conforter l'approche intuitive de probabilité d'un événement
Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ alors pour tout k entier naturel : $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$ où X suit une loi de Poisson de paramètre λ. ▶

Enseignement annuel d'informatique et algorithmique

L'objectif est d'assoir les connaissances des étudiants en algorithmique et de les entraîner à l'utilisation de l'informatique en mathématiques au travers de thèmes empruntés au programme pour comprendre, illustrer et éclairer les notions introduites. Dès qu'un calcul numérique est envisagé, dès qu'un problème incite à tester expérimentalement un résultat, dès qu'une situation aléatoire peut être modélisée avec des outils informatiques, le recours à des algorithmes et des logiciels devra devenir naturel.

Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, et seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le langage retenu pour la programmation dans le programme des classes économiques et commerciales, option mathématiques approfondies , est Python.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules les fonctions et commandes introduites en figurant dans la sous-partie « Commandes exigibles » sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du langage, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Python peuvent donc être introduites, mais cela devra se faire avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de« copier-coller » qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

Seules les notions de Python indiquées dans le programme sont exigibles. La syntaxe précise des commandes devra être rappelée.

1 - Programmation d'algorithmes et de fonctions

`if ...:`
`    ...`
Emploi de `else, elif`
	Structures conditionnelles.

`for k in range(a,b):`
`for k in T:`
`while ...:`
	`T` peut être une matrice, un vecteur, une chaîne de caractères. Les commandes `break` et `continue` ne sont pas exigibles.

`def f(x,y):`
`    ...`
`    return ...`
	Définition d'une fonction.

2 - Commandes exigibles

Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

a) Disponibles de base dans Python

Affectation : `nom = expression`	L'expression peut être du type numérique, booléen, matriciel (ndarray) ou chaîne de caractères.
`#` permet d'insérer un commentaire	Les étudiants doivent savoir faire un usage judicieux des commentaires.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison, test.
`True` `False` `and` `or` `not`	Logique.
`from ... import *, import ... as`	Importation d'une bibliothèque.

b) Dans la librairie `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye, np.linspace, np.arange`	Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
`+` `-` `*` `/` `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=`	Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).
`a,b = np.shape(M)`	Taille de la matrice `M`.
`np.dot, np.transpose`	Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean, np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`
`np.exp, np.log, np.sin, np.cos, np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.
`np.e, np.pi`	

c) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linalg as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,`
`al.solve, al.eig`

d) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal, rd.gamma`	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

e) Dans la librairie `scipy.special`

Exemple d'importation : `import scipy.special as sp`

`sp.ndtr`	Fonction Φ

f) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim, ylim, axis, grid, legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist`	La maîtrise des options de cette fonction n'est pas exigible.
`plt.contour`	Tracés de lignes de niveau en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.
`plt.quiver`	Tracés de gradients en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.

g) Utilisation de la fonction `Axes3D`

Exemple d'importation :

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
ax = Axes3D(plt.figure())
```

`ax.plot_surface`	Représentation de surfaces en lien avec `np.meshgrid`. La maîtrise de cette fonction n'est pas exigible.

3 - Liste de savoir-faire exigibles en première année

Représentation graphique d'une fonction.

Calcul des termes et représentation graphique d'une suite.	Représentation des points (n, u_n). Pour une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, représentation des termes de la suite à partir du graphe de f.
Calculs de valeurs approchées de la limite d'une suite ou de la somme d'une série.	On utilisera des structures répétitives et conditionnelles en exploitant l'étude mathématique. La détermination du rang d'arrêt du calcul résultera directement de l'étude mathématique ou d'un algorithme qui en découle.

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.	On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).
Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.	Pour des fonctions f à primitive F connue, on pourra vérifier expérimentalement le lien entre primitive et intégrale, en comparant $F(b)-F(a)$ avec une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique.
Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra utiliser les fonctions `rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`
Série statistique associée à un échantillon.	Fréquences, fréquences cumulées, histogramme. Moyenne, médiane. Variance et écart-type empiriques. Sur les loi usuelles, on pourra faire un lien entre fréquences et loi, fréquences cumulées et fonction de répartition, moyenne et espérance, variance empirique et variance. On pourra comparer expérimentalement les lois $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ et $\mathcal{P}(\lambda)$.
Approche expérimentale de la loi de Gauss.	On pourra superposer la courbe de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ et l'histogramme d'un échantillon de $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
Calcul approché d'une probabilité.	Approche intuitive de l'estimation : si $P(A)$ est difficile à calculer, on peut simuler N fois l'expérience et assimiler $P(A)$ à la fréquence de réalisation de A.
Résolution de systèmes $MX = B$.	On pourra programmer l'algorithme du pivot de Gauss sur un exemple. En pratique on utilisera plutôt la fonction `al.solve`.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques approfondies – informatique de la classe d'ECG 2nde année

Table des matières

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif de la formation dans les classes préparatoires économiques et commerciales n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement de ces classes et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.
Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse...).

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC de mathématiques approfondies se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie et gestion dispensés en Grande École ou en troisième année de Licence à l'université.

Il s'organise autour de quatre points forts :

- En algèbre linéaire et bilinéaire, on introduit la réduction des endomorphismes et des matrices carrées ainsi que les structures euclidiennes. Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de plusieurs variables, mais aussi en probabilités et en analyse de données (statistiques descriptives bivariées).
- En analyse, on complète l'étude des intégrales généralisées débutée en première année de classe préparatoire et on introduit les fonctions de plusieurs variables définies sur $\mathbf{R}^n$ ainsi que la notion de gradient. Au quatrième semestre, on poursuit cette étude dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes, cruciaux en économie et en finance.
- En probabilités, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, les notions sur les variables aléatoires à densité sont complétées. L'ensemble des notions sera présenté en lien avec la simulation informatique des phénomènes aléatoires. Un des objectifs est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse (et une compréhension plus aboutie) des méthodes de l'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance.
- L'informatique est enseignée tout au long de l'année en lien direct avec le programme de mathématiques. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple de la simulation de lois de probabilité, de la recherche d'extrema en analyse ou de différentes techniques d'estimation.

Au fur et à mesure de la progression, on aura à cœur de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les parties du programme pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

Le langage Python comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera avec pertinence l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées.
Les travaux pratiques de mathématiques avec Python sont organisés autour de quatre thèmes faisant intervenir divers points du programme de mathématiques. L'objectif est d'apprendre aux étudiants à utiliser Python de manière judicieuse et autonome ainsi que de leur permettre d'illustrer ou de modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques. Les savoir-faire et compétences que les étudiants doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme. L'enseignement de ces travaux pratiques se déroulera sur les créneaux horaires dédiés à l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire et bilinéaire

1 - Compléments d'algèbre linéaire

a) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Dimension d'une somme directe de k espaces vectoriels.

Base adaptée à une somme directe.

Concaténation de bases de sous espaces vectoriels.

Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases.

b) Changement de base

Matrice d'un endomorphisme dans une base.

Rappels.

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

$P^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Formules de changement de base.

$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$.
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \, P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Matrices semblables.

Deux matrices A et B carrées sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.
A et B sont semblables si et seulement si elles représentent les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

c) Trace

La trace d'une matrice carrée est introduite uniquement comme outil simple et efficace en vue de la recherche de valeurs propres. Tout développement théorique est exclu. Aucun autre résultat concernant la trace n'est au programme.

Trace d'une matrice carrée.

Notation $\mathrm{Tr}(A)$.

Linéarité de la trace et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Invariance de la trace par changement de base.

$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$.

2 - Éléments propres des endomorphismes et des matrices carrées, réduction

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont définis sur $\mathbf{R}$*. Dans toute cette partie,* f *désignera un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension finie, et* A *une matrice carrée.*

a) Vecteurs propres et espaces propres

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme de E et d'une matrice carrée.	Valeurs propres des matrices triangulaires.
Spectre d'un endomorphisme et d'une matrice carrée.	Notations $\mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme, obtention d'éléments propres de $Q(f)$ à partir d'éléments propres de f.	Si $f(x) = \lambda x$ alors $Q(f)(x) = Q(\lambda)x$. Si $AX = \lambda X$ alors $Q(A)X = Q(\lambda)X$.

b) Recherche d'éléments propres

Polynômes annulateurs d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	On pourra donner les exemples des homothéties, des projecteurs et des symétries.
Si Q est un polynôme annulateur de f (respectivement A) et λ une valeur propre de f (respectivement A), alors λ est racine de Q.	
Tout endomorphisme d'un espace de dimension finie admet au moins un polynôme annulateur non nul. Toute matrice carrée admet au moins un polynôme annulateur non nul.	Aucune autre connaissance sur les polynômes annulateurs ne figure au programme.

c) Propriétés générales

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie admet un nombre fini de valeurs propres et ses sous-espaces propres sont en somme directe.	$\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \leqslant \dim(E)$.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E.	En particulier, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres.

d) Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres de f.	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est alors une matrice diagonale.
Caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.	f est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(f)} \dim\ker(f-\lambda \mathrm{Id}_E) = \dim(E)$.
f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f.	Si $\dim(E) = n$, tout endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
Matrices diagonalisables, diagonalisation d'une matrice carrée.	Interprétation matricielle des résultats précédents. A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Application au calcul des puissances d'une matrice carrée.	

3 - Algèbre bilinéaire

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions fondamentales de l'algèbre bilinéaire dans le cadre euclidien, utilisées en particulier lors de l'étude des fonctions de n variables. L'étude des endomorphismes symétriques sera faite au quatrième semestre.

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. On identifiera $\mathbf{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$.

a) Produit scalaire

Produit scalaire, norme associée.	Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive. Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$; exemples de produits scalaires.
Inégalité de Cauchy-Schwarz.	Cas de l'égalité.
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux.	
Familles orthogonales, familles orthonormales ou orthonormées.	On ne considèrera que des familles finies. Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.
Théorème de Pythagore.	

b) Espaces euclidiens

Dans ce paragraphe x, y désignent des vecteurs d'un espace vectoriel et X, Y sont les colonnes coordonnées correspondantes dans une base.

Espace euclidien.	Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$, muni d'un produit scalaire.
Existence de bases orthonormées.	On pourra introduire la méthode de l'orthonormalisation de Schmidt sur des exemples en petite dimension, mais cette méthode n'est pas exigible.
Coordonnées et norme d'un vecteur dans une base orthonormée.	$x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i \ , \ \|x\|^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$.
Expression matricielle du produit scalaire et de la norme euclidienne en base orthonormée.	$\langle x, y \rangle = {}^tXY \ ; \ \|x\|^2 = {}^tXX$.
Changement de bases orthonormées.	La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$. Aucune autre connaissance sur les matrices orthogonales n'est au programme.
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel.	Notation $F^{\perp}$.
Complétion d'une famille orthonormée en une base orthonormée.	

II - **Fonctions réelles définies sur $\mathbf{R}^n$**

1 - Introduction aux fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$

Au troisième semestre, l'objectif est de confronter les étudiants à la notion de fonction réelle de n variables, aux principales définitions tout en évitant les problèmes de nature topologique. C'est pourquoi le domaine de définition des fonctions sera systématiquement $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. L'étude de la continuité d'une fonction en un point pathologique est hors programme, ainsi que l'étude des recollements de formules lorsque f est définie sur $\mathbf{R}^n$ par plusieurs formules.

Dès que possible, les notions introduites seront illustrées à l'aide de la libraire matplotlib.pyplot de Python.

Fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.	On donnera de nombreux exemples de fonctions de 2, 3 ou n variables réelles. Les fonctions polynomiales de n variables donnent des exemples simples de fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$.
Équation du graphe d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$.	Cas des fonctions affines de n variables.
Lignes de niveau pour les fonctions de deux variables.	On se limitera à des exemples simples.

Continuité d'une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.	Une fonction f, définie sur $\mathbf{R}^n$, est continue au point x_0 de $\mathbf{R}^n$ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\|x - x_0\| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. f est continue sur $\mathbf{R}^n$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathbf{R}^n$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ce sujet. On mettra en avant l'analogie avec la notion de continuité des fonctions d'une variable vue en première année. Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbf{R}^n$. Résultat admis.
Opérations sur les fonctions continues.	Somme, produit, quotient. La composition d'une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue de I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue. Résultats admis.

2 - Calcul différentiel

L'introduction des notions différentielles concernant les fonctions numériques de plusieurs variables réelles se fait en se limitant aux fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$. La détermination de la classe d'une fonction n'est pas au programme.
La recherche d'extremum est abordée ici, jusqu'à la condition nécessaire du premier ordre.

Les fonctions sont désormais supposées définies et continues sur $\mathbf{R}^n$.

a) Dérivées partielles, gradient

Fonctions partielles en un point.	
Dérivées partielles d'ordre 1.	Notation $\partial_i f$.
Gradient en un point x.	Notation $\nabla f(x)$. $\nabla f(x)$ est l'élément de $\mathbf{R}^n$ égal à $(\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$.
Dérivées partielles d'ordre 2.	Notation $\partial^2_{i,j} f$.
Fonctions de classe C^1 et C^2 sur $\mathbf{R}^n$.	Les fonctions polynomiales de n variables sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbf{R}^n$. Résultat admis.
Opérations sur les fonctions de classe C^1 et C^2.	Somme, produit, quotient. La composition d'une fonction de classe C^1 [resp. C^2] sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction de classe C^1 [resp. C^2] sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est de classe C^1 [resp. C^2]. Résultats admis.
Pour une fonction de classe C^1 : existence et unicité d'un développement limité d'ordre 1 en un point.	$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(0) = 0$ et ε continue en 0. Résultat admis.
Si f est de classe C^1, dérivée de la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(t) = f(x + th)$.	$g'(t) = \langle \nabla f(x + th), h \rangle$ et donc $g'(0) = \nabla f(x_0)$. Interprétation géométrique du gradient.

b) Recherche d'extremum : condition d'ordre 1

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.	
Condition nécessaire du premier ordre. Point critique.	Si une fonction f de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$ admet un extremum local en un point x, alors $\nabla f(x) = 0$. Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques.

III - Compléments de probabilités ; couples et n-uplets de variables aléatoires réelles

L'objectif est double :

- *d'une part, consolider les acquis de première année concernant les variables aléatoires discrètes, et enrichir le champ des problèmes étudiés, avec, en particulier, l'étude simultanée de variables aléatoires (vecteurs aléatoires de $\mathbf{R}^n$) ;*
- *d'autre part, effectuer une étude élémentaire des lois continues usuelles discrètes ou à densité.*

On fera des liens entre certaines lois dans le cadre des approximations et des convergences, ainsi que les liens entre statistique et probabilités dans le cadre de l'estimation.

La théorie des familles sommables n'est pas au programme. Aucune difficulté concernant la dénombrabilité ne sera soulevée (on pourra si besoin admettre que $\mathbf{N}^k$ est dénombrable.) On admettra le théorème suivant :
Soit I un ensemble dénombrable infini, indexé par $\mathbf{N}$ sous la forme $I = \{\varphi(n); n \in \mathbf{N}\}$ où φ est une bijection de $\mathbf{N}$ dans I. Si la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation φ, et pourra également être notée $\sum\limits_{i \in I} u_i$. L'étude de cette convergence n'est pas un objectif du programme. On dira alors que la série est absolument convergente (ou converge absolument). Toutes les opérations (somme, produit, regroupement par paquets, etc.) sont alors licites. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ces notions, qui ne sont pas exigibles des étudiants, et tout exercice ou problème y faisant référence devra impérativement les rappeler.

1 - Compléments sur les variables aléatoires réelles

a) Généralités sur les variables aléatoires réelles

On rappellera la signification de la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.	
Définition d'une variable aléatoire.	Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout x dans $\mathbf{R}$, $[X \leq x]$ est un événement. Le fait de vérifier qu'une fonction est une variable aléatoire n'est pas un des objectifs du programme.
Fonction de répartition d'une variable aléatoire.	

Loi d'une variable aléatoire	C'est la donnée des probabilités $P(X \in I)$ où I est intervalle. La loi est caractérisée par la fonction de répartition.
Une combinaison linéaire, un produit de variables aléatoires sont des variables aléatoires. Le maximum et le minimum de variables aléatoires sont des variables aléatoires.	Résultat admis.

b) Espérance et conditionnement pour les variables aléatoires discrètes

Espérance conditionnelle.	Si A est un événement de probabilité non nulle, $E(X/A)$ est l'espérance de X, si elle existe, pour la probabilité conditionnelle P_A.
Formule de l'espérance totale.	Soit X une variable aléatoire discrète, soit (A_n) un système complet d'événements tels que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $P(A_n) \neq 0$. Alors X admet une espérance pour P si et seulement si : — pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'espérance conditionnelle $E(X/A_n)$ existe ; — la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} E(\lvert X\rvert/A_n)P(A_n)$ converge. Dans ce cas, $E(X) = \sum_{n\in\mathbf{N}} E(X/A_n)P(A_n)$.

2 - Introduction aux variables aléatoires à densité

a) Densités et fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition d'une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$.	Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une densité de probabilité lorsqu'elle est continue sauf en nombre fini de points, positive et vérifie : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$
Définition d'une variable aléatoire à densité.	On dit qu'une variable aléatoire X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points. Toute fonction égale à F'_X sauf éventuellement en un nombre finie de point est une densité de probabilité et on dit que c'est une densité de X. Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire à densité par la donnée d'une densité f_X. Toute densité de probabilité sur $\mathbf{R}$ est la densité d'une variable aléatoire.	 Résultat admis.

Transformation affine d'une variable à densité.	Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et la densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).
Exemples simples de calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les étudiants devront savoir retrouver les lois de X^2 et $\varphi(X)$ avec φ de classe C^1 strictement monotone sur $X(\Omega)$.

b) Espérance des variables aléatoires à densité

Espérance d'une variable aléatoire à densité. Variables aléatoires centrées.	Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $E(X)$ est égale à cette intégrale. Exemple de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.
Linéarité et croissance de l'espérance pour les variables aléatoires à densité.	Résultat admis.
Existence d'espérance par domination.	Résultat admis.
Théorème de transfert.	Si X est une variable aléatoire ayant une densité f_X nulle en dehors de l'intervalle $]a, b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si g est une fonction continue sur $]a, b[$ éventuellement privé d'un nombre fini de points, $E(g(X))$ existe et est égale à $\displaystyle\int_a^b g(t) f_X(t)\mathrm{d}t$ si et seulement si cette intégrale converge absolument. On pourra admettre ou démontrer ce résultat dans le cas où g est de classe C^1, avec g' strictement positive (ou strictement négative) et le vérifier dans des cas simples. Cette démonstration n'est pas exigible.

3 - Lois de variables aléatoires à densité usuelles

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b]$. $$X \hookrightarrow \mathcal{U}[0, 1] \iff a + (b - a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a, b].$$
Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. $$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad (\lambda > 0).$$
Loi normale centrée réduite, loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si X suit une loi normale, et si a et b sont deux réels, avec $a \neq 0$, alors la variable aléatoire $aX + b$ suit également une loi normale. Si $\sigma > 0$, $$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Pour tout réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Exemples d'utilisation de la table de la loi normale et interprétation graphique.
On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. $\boxed{\blacktriangleright}$

Lois γ. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi γ.

X suit une loi $\gamma(\nu)$, avec $\nu > 0$, si X admet comme densité :

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

avec $\Gamma(\nu) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Pour le calcul des moments de la loi γ, on pourra établir $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier n de $\mathbf{N}$.

4 - Variance des variables aléatoires à densité

Variance, écart-type. Variables aléatoires centrées, centrées réduites.
Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle (uniforme sur un intervalle, exponentielle, normale).

On admettra que l'existence de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire X est équivalente à l'existence de $E(X^2)$.

Illustrations avec les lois usuelles.
On pourra donner un exemple de variable aléatoire n'admettant pas de variance.

5 - n-uplets de variables aléatoires réelles ; généralisation des propriétés de l'espérance et de la variance

Dans cette partie, on étend la notion de loi de couple de variables aléatoires discrètes vue en première année à un vecteur aléatoire, puis, de manière intuitive, la notion d'espérance à une somme de variables aléatoires admettant chacune une espérance. La définition de l'espérance générale ou des moments d'une variable aléatoire dans un cadre quelconque n'étant pas au programme, toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques.
L'étude, pour $n > 2$, de n-uplets à composantes non indépendantes n'est pas un objectif du programme.

a) Généralisation

Loi d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Loi marginale.	La loi d'un vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles est donné par la fonction $F_{(X_1,\ldots,X_n)}$ définie sur $\mathbf{R}^n$ par : $F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x_i]\right)$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion.
Caractérisation de la loi d'un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.	
Si deux vecteurs $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ont même loi et si g est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, alors les variables aléatoires réelles $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ ont même loi.	Aucune difficulté ne sera soulevée. Résultat admis.

b) Indépendance

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles.	X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si : $F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)$ pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$.
Caractérisation de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles.	X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si : $P\left(\left[\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i \in I_i\right]\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} P([X_i \in I_i])$ pour tous intervalles I_1, ..., I_n de $\mathbf{R}$. Résultat admis.
Caractérisation de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} P([X_i = x_i])$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$. Résultat admis.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2},..., X_n. Résultat admis.

c) Le cas particulier du couple

On généralisera les notions de linéarité, de croissance et d'existence par domination de l'espérance à des variables aléatoires quelconques.	Résultats admis
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Résultats admis.

Covariance de deux variables aléatoires admettant une variance. Propriétés. Formule de Huygens.	Notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Bilinéarité, symétrie, positivité de la covariance. $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
Variance d'une somme.	$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.
Cœfficient de corrélation linéaire. Propriétés.	Notation $\rho(X,Y)$. $\lvert\rho(X,Y)\rvert \leqslant 1$. Interprétation dans le cas où $\rho(X,Y) = \pm 1$.
Si X et Y sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle.	La réciproque est fausse.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X+Y$ admet une variance et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Résultats admis.

d) Sommes de variables aléatoires indépendantes

Densité de la somme $Z = X + Y$ de deux variables aléatoires à densité indépendantes, produit de convolution.	Si la fonction h définie par la relation $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sauf peut-être en un nombre fini de points, c'est une densité de Z. C'est le cas si f_X (ou f_Y) est bornée.
Stabilité de la loi γ pour la somme.	Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.
Loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.	Pour étudier la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on se ramènera après multiplication par λ à une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.
Stabilité de la loi normale pour la somme.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Compléments d'algèbre bilinéaire

1 - Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien, matrices symétriques

Endomorphismes symétriques.

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien E est symétrique si et seulement si pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, on a :

$$\langle f(x)\ ,\ y\rangle \;=\; \langle x\ ,\ f(y)\rangle.$$

Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Si f est un endomorphisme symétrique et si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^{\perp}$ est stable par f.

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique f d'un espace vectoriel de dimension finie sont deux à deux orthogonaux.

Si $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ sont p vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique f associés à des valeurs propres distinctes, alors la famille $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ est une famille orthogonale.

2 - Projection orthogonale

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F.

Notation p_F.

Si $(u_1, \dots, u_k)$ est une base orthonormée de F, alors :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i.$$

Si p est un projecteur, alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.

Caractérisation par minimisation de la norme.

$$v = p_F(x) \Longleftrightarrow \|x - v\| = \min_{u\in F} \|x - u\|.$$

Application au problème des moindres carrés et à la droite de régression : minimisation de $\|AX - B\|$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ de rang p, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$.
Résultats non exigibles.

3 - Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

Si E est un espace vectoriel euclidien, tout endomorphisme symétrique de E est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Résultat admis.
Si f est un endomorphisme symétrique, il existe une base $\mathcal{B}$ de E orthonormée composée de vecteurs propres de f.

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de changement de base orthogonale.	Si A est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$.

II - Fonctions réelles de n variables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$; recherche d'extrema

L'objectif est de présenter la démarche de recherche d'extrema et d'en acquérir une maîtrise raisonnable à partir d'un minimum d'outils théoriques. L'espace $\mathbf{R}^n$ sera muni de la norme euclidienne usuelle.
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme ; elle devra toujours être précisée. Néanmoins, il est nécessaire de sensibiliser les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés. Les étudiants ont été familiarisés avec les fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$ au troisième semestre, aussi on s'appuiera, pour mener une initiation à la topologie de $\mathbf{R}^n$, sur les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ définis par des inégalités du type $\{x \in \mathbf{R}^n/\varphi(x) < a\}$ ou $\{x \in \mathbf{R}^n/\varphi(x) \leqslant a\}$ où φ est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$. On donnera également la définition d'un ensemble borné.

L'étude de fonctions de n variables à valeurs dans $\mathbf{R}$ se limitera à des fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ pouvant être définis simplement (réunion, intersection finies) à l'aide des ensembles fermés ou ouverts précédents.

Les résultats seront énoncés dans le cas de fonctions de n variables. Pour les démonstrations, on pourra se limiter aux cas $n = 2$ ou $n = 3$.
Aucune des démonstrations de ce chapitre n'est exigible des étudiants.

Dans ce paragraphe, h désigne un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et H la colonne coordonnée correspondante.

1 - Fonction de n variables définies sur une partie de $\mathbf{R}^n$

Dans ce paragraphe, on étend à des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, les notions et définitions vues au troisième semestre pour des fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$. Toute difficulté concernant la détermination de la classe d'une fonction est exclue.

Extension de la notion de continuité aux fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée.
Extension de la notion de fonctions C^1 et C^2 aux fonctions définies sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée. Extension des notions, vues au troisième semestre, de dérivées partielles d'ordre 1 et 2, gradient, développement limité d'ordre 1, opérations sur les fonctions de classe C^1 ou C^2.

2 - Compléments sur les fonctions de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$

Matrice hessienne en un point x.	Notation $\nabla^2 f(x)$.
Théorème de Schwarz.	Si f est de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$, alors la matrice hessienne est symétrique en tout point de $\mathcal{O}$. Résultat admis.

Fonction quadratique définie sur $\mathbf{R}^n$ associée à une matrice symétrique réelle A.

$q(h) = {}^tHAH$.
On remarquera qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que si h a pour coordonnées $h_1, \ldots, h_n$ dans $\mathcal{B}$ on a :

$$q(h) = \sum \lambda_i h_i^2,$$

où $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

Existence et unicité d'un développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$.

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} q_x(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$
où $\varepsilon(0) = 0$, ε continue en 0 et q_x est la fonction quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$.
Résultat admis.

Si f est de classe C^2, dérivée seconde de la fonction g définie au voisinage de 0 par :
$$g(t) = f(x+th).$$

$g''(t) = q_{x+th}(h)$ où q_{x+th} est la fonction quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x+th)$ et donc $g''(0) = q_x(h)$.

3 - Recherche d'extrema

Dans un premier temps, on étendra rapidement les notions vues au troisième semestre à une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$.

a) Définition

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.

b) Extrema sur un ensemble fermé borné

Une fonction continue sur une partie fermée bornée admet un maximum global et un minimum global.

Résultat admis.

c) Condition d'ordre 1

Condition nécessaire du premier ordre.
Point critique.

Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^n$ admet un extremum local en un point x_0 de $\mathcal{O}$, alors $\nabla f(x_0) = 0$.
Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques.

d) Condition d'ordre 2

Étude locale d'une fonction f de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ en un point critique.

Si x_0 est un point critique de f :
- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbf{R}_+^*$, alors f admet un minimum local en x_0,
- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0)) \subset \mathbf{R}_-^*$, alors f admet un maximum local en x_0,
- si $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x_0))$ contient deux réels non nuls de signes distincts, f n'admet pas d'extremum en x_0.

On fera le lien avec le signe de la fonction quadratique q_{x_0} associée à la hessienne de f en x_0.

Point selle (ou col).

Une condition suffisante d'extremum global.

Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et si x_0 est un point critique de f :
- si pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbf{R}^+$, alors f admet un minimum global en x_0,
- si pour tout $x \in \Omega$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbf{R}_-$, alors f admet un maximum global en x_0,

On introduira la notion d'ouvert convexe sans soulever aucune difficulté théorique et la vérification de cette propriété n'est pas un objectif du programme.
On admet ce résultat.

e) Recherche d'extrema sous contrainte d'égalités linéaires

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des solutions d'un système linéaire $\begin{cases} g_1(x) & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ g_p(x) & = b_p \end{cases}$ *et $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions du système homogène associé.*

Condition nécessaire du premier ordre sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Si f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$, et si la restriction de f à $\mathcal{C}$ admet un extremum local en un point x_0, alors $\nabla f(x_0)$ est dans $\mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_p(x_0))$.
On remarquera que :
- — $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_p(x_0))$.
- — Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ réels tels que :

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x_0).$$

Point critique pour l'optimisation sous contrainte.
Exemples de recherche d'extrema globaux sous contrainte d'égalités linéaires dans des cas simples.

III - **Probabilités : convergences, estimation**

1 - Convergences et approximations

a) Convergence en probabilité

On pourra rappeler l'inégalité de Markov et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev vues en première année.	
Convergence en probabilité.	La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers X si : $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P([\lvert X_n - X\rvert \geqslant \varepsilon]) = 0.$ Notation $X_n \xrightarrow{P} X$.
On pourra énoncer la loi faible des grands nombres en terme de convergence en probabilité.	
Composition par une fonction continue.	Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$. Résultat admis.
Convergence en probabilité et somme.	Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors $X_n+Y_n \xrightarrow{P} X+Y$.

b) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers X.	Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si en tout point de continuité x de F_X : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$ On illustrera cette définition à l'aide des approximations vues en première année.
Cas où les X_n et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}$.	La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si : $\forall k \in \mathbf{N}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$
Composition par une fonction continue.	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $(f(X_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers $f(X)$. Résultat admis.

Théorème limite central.

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant une espérance m et une variance σ^2 non nulle, si on note : $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, alors la suite de variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
D'où, on a pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

Résultats admis.

Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.

Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

2 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$). Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la vraie valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ où $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et

$(x_1, \dots, x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ observé.
Exemples simples d'estimateurs.	Exemple de la moyenne empirique $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
Exemples simples d'estimations.	

b) Intervalle de confiance

S'il existe des critères pour juger des qualités d'un estimateur ponctuel T_n de $g(\theta)$, aucune certitude ne peut jamais être apportée quant au fait que l'estimation donne la vraie valeur à estimer.
La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne $g(\theta)$ avec une probabilité minimale donnée. Dans tout ce paragraphe, $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ désigneront deux suites d'estimateurs de $g(\theta)$ telles que pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $n \geqslant 1$, $P_\theta([U_n \leqslant V_n]) = 1$.

Intervalle de confiance.	Soit $\alpha \in [0, 1]$. $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ si pour tout θ de Θ, $$P_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1 - \alpha.$$ L'utilisation dans certains cas du théorème limite central impose d'introduire la notion d'intervalle de confiance asymptotique. Sa réalisation est l'estimation de cet intervalle de confiance. Les variables aléatoires X_n seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ. On éclairera ces notions à l'aide de simulations informatiques.
Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de Bernoulli.	En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.	On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique.

c) Estimation par intervalle de confiance asymptotique

Intervalle de confiance asymptotique.	On appelle intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ une suite $([U_n, V_n])_{n\geqslant 1}$ vérifiant : pour tout θ de Θ, il existe une suite de réels (α_n) à valeurs dans $[0,1]$, de limite α, telle que pour tout $n \geqslant 1$, $P_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha_n$. Par abus de langage on dit aussi que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique.
Intervalles de confiance asymptotiques obtenus avec le théorème central limite.	Exemple du paramètre d'un loi de Bernoulli. On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation normale de la loi binomiale.

d) Comparaison des estimateurs

La notion de risque quadratique n'est pas au programme.

Estimateur sans biais.	L'estimateur T_n de $g(\theta)$ est sans biais si pour tout θ de Θ, $E_\theta(T_n) = g(\theta)$.
Suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ d'estimateurs.	Chaque T_n est de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Estimateur convergent.	Une suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ est convergente si pour tout θ, la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $g(\theta)$. Par abus de langage, on dit aussi que l'estimateur est convergent. On rappellera que si $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $g(\theta)$ et si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, alors $(f(T_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $f(g(\theta))$.
Condition suffisante de convergence.	Une suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de $g(\theta)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n) = g(\theta)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$ est convergente. Cette convergence pourra être étudiée à l'aide de l'inégalité de Markov. La démonstration de ce théorème donne naturellement un intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ ainsi qu'un moyen de comparer la qualité des estimateurs. On illustrera en informatique ces notions $\boxed{\blacktriangleright}$.

TRAVAUX PRATIQUES DE MATHÉMATIQUES AVEC PYTHON

En première année, les élèves ont acquis les bases de manipulation du logiciel Python. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année est de permettre aux étudiants d'utiliser Python de manière judicieuse et autonome pour illustrer ou modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques.

Les séances de travaux pratiques doivent se faire le plus souvent possible sur ordinateur. Les étudiants, au cours de leurs études ultérieures puis de leur parcours professionnel, seront amenés à utiliser des outils informatiques divers choisis pour leurs fonctionnalités, etdés que seule une pratique régulière de ces outils informatiques peut leur permettre d'en acquérir la maîtrise. De plus, en adoptant cette démarche exploratoire permise par le dialogue interactif avec la machine, cette pratique peut s'avérer bénéfique pour les apprentissages et faciliter la compréhension de concepts plus abstraits.

Le programme d'informatique s'articule autour de quatre thèmes : statistiques descriptives bivariées, fonctions de plusieurs variables, simulation de lois, estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques.

Dans certains thèmes, il s'avérera nécessaire d'introduire de nouvelles notions ou approches mathématiques. Celles-ci devront être explicitées en préambule des séances d'informatique et ne pourront en aucun cas être exigibles des étudiants. Certaines seront propres à un thème particulier, d'autres (comme par exemple les méthodes de Monte-Carlo) pourront au contraire être envisagées de manière transversale. Toutes les précisions nécessaires devront toujours être données lors de leur utilisation.

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi seules certaines fonctions et commandes sont exigibles. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du langage, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. De nouvelles commandes Python peuvent donc être introduites, mais cela devra se faire avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. Dans les sujets, les commandes introduites devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires seront données lors de leur utilisation et leur interprétation. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives des étudiants grâce à l'utilisation de l'aide de Python, et à l'usage d'opérations de « copier-coller »qui permettent de prendre en main rapidement des fonctions nouvelles et évitent d'avoir à connaître par cœur la syntaxe de commandes complexes.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles (traitement de données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance, etc), en faisant dès que possible un rapprochement avec les autres disciplines.

I - Liste des exigibles

1 - Commandes

Les commandes exigibles ont été listées dans le programme de première année. On rappellera dans les sujets toutes les syntaxes des commandes non exigibles.

2 - Savoir-faire et compétences

C1 : Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique (simple, double) ou d'une loi.

C2 : Modéliser et simuler des phénomènes (aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique.

C3 : Représenter et exploiter le graphe d'une fonction d'une, deux variables.

C4 : Représenter et interpréter différents types de convergences.

C5 : Utiliser la méthode de Monte-Carlo sur des exemples pertinents (calcul approché d'intégrales, de probabilités).

C6 : Porter un regard critique sur les méthodes d'estimation et de simulation.

II - **Liste des thèmes**

1 - Statistiques descriptives bivariées

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C1** et **C6**)

Série statistique à deux variables, nuage de points associé.
Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage.
Covariance et cœfficient de corrélation empiriques, droites de régression.

On tracera le nuage de points et les droites de régression et on pourra effectuer des prétransformations pour se ramener au cas linéaire.
On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer.

2 - Fonctions de plusieurs variables

(Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : **C2** et **C3**)

Graphe d'une fonction de deux variables, lignes de niveau, plan affine tangent au graphe. Dérivées partielles et dérivées directionnelles, représentation du gradient.
Position du graphe par rapport au plan affine tangent au graphe, lien avec les valeurs propres de la matrice hessienne, points selles. Étude d'extrema locaux et globaux. Extrema sous contrainte linéaire.

À cette occasion, on pourra mettre en évidence l'orthogonalité du gradient avec les tangentes aux lignes de niveau du graphe d'une fonction de deux variables.
Programmation de fonctions variées permettant de mettre en évidence les notions d'extrema locaux ou globaux, avec ou sans contrainte. On pourra prendre des exemples issus de l'économie ou de la finance.

3 - Simulation de lois

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C1**, **C2**, **C3** et **C6**)

Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique et la comparer à la fonction de répartition théorique.

Méthode d'inversion.

Application de la méthode d'inversion pour la simulation par exemple des lois exponentielles ou de Cauchy.
On pourra mettre en évidence, grâce aux simulations, qu'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy n'admet pas d'espérance.

Méthodes de simulation d'une loi géométrique.	Utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle `while`, utilisation d'une loi exponentielle et de la fonction `floor`, utilisation de la librairie `numpy.random`.
Simulations informatiques d'une loi normale par utilisation du théorème limite central appliqué à différentes lois.	Comparaison entre différentes méthodes de simulation d'une loi normale. Utilisation de la librairie `numpy.random`. On pourra s'intéresser au cas particulier de 12 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme.

4 - Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

(Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : **C2**, **C4**, **C5** et **C6**)

Méthode de Monte-Carlo : principe, garanties d'approximation.	Cette méthode permet d'estimer des quantités qu'il est difficile de calculer explicitement mais qu'il est facile d'approcher par simulation (probabilités d'événements, espérances de variables aléatoires). Ainsi, on pourra estimer par exemple les valeurs prises par la fonction de répartition de la somme ou du produit de deux variables aléatoires. On pourra justifier par simulation la validité de l'approche par intervalle de confiance asymptotique à partir d'un certain rang.
Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Comparaison des intervalles de confiance d'un paramètre obtenus par différentes méthodes.	Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de Bernoulli et de l'espérance d'une loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe III
Programmes d'économie, sociologie, histoire du monde contemporain
1ère et 2nde années

Programme d'Économie, Sociologie et Histoire du monde contemporain (ESH)
CPGE Économique et commerciale, voie générale (ECG)

Présentation générale

L'enseignement d'économie, sociologie et histoire vise à apporter aux étudiants les instruments d'analyse et de compréhension du monde contemporain. Pour cela, il associe trois approches complémentaires : la science économique ; l'histoire de la pensée et des faits économiques et sociaux ; la sociologie.

Cet enseignement a pour ambition de développer les compétences de synthèse, d'analyse et d'argumentation des étudiants. Ils devront maîtriser les principaux concepts, mécanismes et modèles de l'analyse économique (notamment de la microéconomie et de la macroéconomie), savoir mobiliser et mettre en perspective de façon pertinente les principaux phénomènes économiques et sociaux depuis le début du XIX^{e} siècle et maîtriser les éléments de base, les méthodes et démarches de la sociologie, plus particulièrement celles de la structure sociale, des modes de vie et des organisations.

L'étude des fondements et des analyses théoriques de l'économie et de la sociologie ne doit pas faire perdre de vue la dimension historique. Il s'agira, dans une perspective dynamique, d'expliquer les faits économiques et sociaux par l'analyse ou d'éclairer l'analyse par les faits.

Le programme est structuré en quatre modules semestriels dont le premier a pour objectif de faciliter la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, en favorisant l'adaptation des étudiants à ce nouvel enseignement.

Le premier module présente les bases et les méthodes essentielles de l'économie (de la microéconomie notamment) et de la sociologie ; il introduit une histoire de la pensée économique et sociologique. Le deuxième module traite de la croissance et du développement depuis le début du XIX^{e} siècle. Le troisième module est consacré à l'étude de la mondialisation. Le quatrième module est centré sur les modèles macroéconomiques, sur les déséquilibres et l'action des pouvoirs publics. Les professeurs pourront exercer leur liberté pédagogique en organisant comme ils le souhaitent le contenu de chaque module.

Module 1. Les fondements de l'économie et de la sociologie

Orientation générale
Ce module constitue une présentation des bases essentielles de l'économie et de la sociologie. La première partie vise à présenter les principaux acteurs de l'économie et les liens qui les unissent, dans une perspective inspirée de la comptabilité nationale. La seconde partie met l'accent sur les équilibres de marché. La troisième présente les fondements de la sociologie.

1.1/ Les fondements de l'économie

Objectifs
Il s'agira ici d'étudier le cadre général des activités économiques et l'histoire de la pensée économique pour éclairer les enjeux économiques contemporains.

1.1.1. Les acteurs et les grandes fonctions de l'économie
1.1.2. La monnaie et le financement de l'économie
1.1.3. Les grands courants de la pensée économique depuis le XVIe siècle

Commentaires
On étudiera les caractéristiques des différents acteurs économiques ainsi que les opérations qui les relient. Cette approche utilisera les concepts et outils de la comptabilité nationale. On abordera ainsi la présentation du circuit économique et des agrégats de la comptabilité nationale. On mettra l'accent sur l'équilibre ressources-emplois et sa traduction dans le tableau entrées-sorties, y compris en introduisant les coefficients techniques. On mettra en évidence les relations entre secteurs institutionnels pour montrer la logique de la répartition des revenus. La construction du tableau économique d'ensemble ne sera pas exigée.
On étudiera l'évolution des formes et des fonctions de la monnaie, le processus de création monétaire et les différents modes de financement de l'économie sans analyser précisément les politiques monétaires qui seront traitées en seconde année.
Enfin on présentera les grands courants de la pensée économique depuis la naissance de l'économie politique, ainsi que les filiations entre les auteurs.

1.2/ Le comportement des agents et le fonctionnement du marché

Objectifs
Il s'agira de présenter les concepts essentiels de la démarche microéconomique, plus particulièrement les décisions de consommation et de production, et les équilibres de marché, avant d'analyser les défaillances de marché.

1.2.1. L'équilibre micro-économique du producteur et du consommateur
1.2.2. L'offre, la demande et l'équilibre du marché en concurrence parfaite
1.2.3. Les défaillances de marché

Commentaires

On étudiera la manière dont le consommateur optimise ses choix, en présentant les concepts d'utilité et de fonctions d'utilité, de courbes d'indifférences, de contrainte budgétaire et de taux marginal de substitution ; on étudiera les conséquences d'une variation de revenu ou de prix sur l'équilibre du consommateur. On définira et mesurera les élasticités. On étudiera les choix du producteur à partir d'une fonction de production, et la façon dont une variation du coût de l'un ou l'autre des facteurs de production modifie leur utilisation. On étudiera ensuite les différents types de coûts, et on montrera comment sont construites les offres de court et de long terme.
La présentation du marché concurrentiel sera l'occasion de définir l'équilibre partiel à l'aide des courbes d'offre et de demande, et de montrer comment consommateurs et producteurs réagissent à des variations de prix (effet-revenu et effet-substitution). On analysera les gains à l'échange qu'un offreur ou un demandeur peuvent tirer de leur participation au marché. On montrera les enjeux de la notion d'équilibre général.
On présentera les situations de défaillance du marché : monopole naturel, biens collectifs, biens communs, externalités et asymétries d'information.
L'étude des externalités permettra d'introduire la question des modalités de leur internalisation.

1.3/ Les fondements de la sociologie

Objectifs

Il s'agira de montrer, à travers le thème « individu et société », la nature de la contribution de la sociologie à la connaissance du social et comment elle s'est constituée comme une discipline propre, avec ses concepts, ses méthodes, ses auteurs.

1.3.1. Les grands courants de la pensée sociologique depuis le XIXe siècle
1.3.2. La pluralité des méthodes sociologiques

Commentaires

On étudiera comment les sociologues se sont saisis de la question de l'antériorité de la société ou de l'individu pour construire une science sociale explicative du monde social. On montrera qu'il est nécessaire de concevoir l'individualisation comme un processus toujours à l'œuvre. On montrera, à l'aide d'exemples, que l'innovation sociologique est passée par le renouvellement théorique comme par le renouvellement des objets.
À partir de cette même question de l'individu et de la société, on montrera que les méthodes de la sociologie sont multiples (méthodes qualitatives et quantitatives) et que les outils d'enquête, nécessairement pluriels, opèrent des rapprochements avec d'autres sciences sociales (ethnologie, science politique, économie et histoire).

Module 2. Croissance et développement

Orientation générale

Ce module étudie différentes dimensions de la croissance et du développement depuis la révolution industrielle et s'interroge sur leurs conséquences. La première partie est centrée sur l'étude de la croissance et du développement. La seconde partie, qui porte sur les transformations économiques, sociales et démographiques, montrera que la croissance économique s'est accompagnée de changements importants à la fois dans l'organisation de la production, dans les structures sociales et démographiques ainsi que dans les modes de vie. La troisième partie a pour objet d'étude l'entreprise, organisation centrale de l'activité économique comme de la société, qui est à l'origine des mutations du système productif mais est également transformée par les évolutions économiques et sociales.

2.1/ La croissance et le développement depuis le XIXe siècle

Objectifs

La croissance sera analysée dans sa double dimension théorique et historique depuis la révolution industrielle. On étudiera les inégalités de développement et les stratégies suivies par les pays au cours des deux derniers siècles. On s'interrogera sur la soutenabilité du développement dans un monde aux ressources finies où les contraintes environnementales pèsent de plus en plus.

2.1.1. La croissance économique
2.1.2. Inégalités et stratégies de développement
2.1.3. La soutenabilité de la croissance et du développement

Commentaires

On présentera les caractéristiques de la croissance depuis la révolution industrielle en montrant que tous les pays ne sont pas concernés en même temps et avec la même intensité. On présentera les principaux modèles d'analyse de la croissance.
On étudiera les inégalités de développement en montrant qu'elles sont évaluées à l'aune d'un modèle, celui des pays capitalistes avancés, et à travers de nombreux indicateurs. On montrera que leur appréhension n'est pas exempte de références axiologiques et qu'elle est dépendante des instruments de mesure. On montrera que ces inégalités existent entre les pays et au sein des pays.
On montrera que la diversité des stratégies de développement mises en œuvre, avec plus ou moins de réussite, pose la question de l'homogénéité du développement.
On étudiera la manière dont des contraintes nouvelles en termes d'écologie et de soutenabilité pèsent de plus en plus sur le développement de l'ensemble du monde. On réfléchira aux conditions d'un développement durable, notamment dans le domaine de la transition écologique.

2.2/ Les transformations des structures économiques, sociales et démographiques depuis le XIXe siècle

Objectifs

On présentera les transformations des structures économiques, sociales et démographiques et on montrera que leurs relations avec la croissance sont complexes.

2.2.1. Les transformations des structures économiques et financières
2.2.2. Mobilité sociale et transformations des structures sociales
2.2.3. Transformations démographiques et évolution des modes de vie

Commentaires

Croissance, développement et transformations du système productif sont en interaction permanente. On étudiera l'évolution de la productivité, ainsi que les mutations des secteurs d'activité et des modes de financement depuis la révolution industrielle.
Les transformations économiques s'accompagnent de transformations de la structure sociale. La prise en compte du temps long sera nécessaire pour appréhender les évolutions des groupes sociaux et le changement social. L'analyse de la mobilité sociale nécessitera de s'interroger sur les instruments de sa mesure et la définition des populations concernées. On étudiera les trajectoires individuelles et collectives.
On présentera le mode de calcul et la signification des grands indicateurs démographiques. On étudiera les relations entre développement économique, évolution des pyramides des âges et flux démographiques.
On montrera que les modes de vie - notamment la consommation - se transforment en raison de multiples facteurs, sociologiques, démographiques et environnementaux.

2.3/ Entreprise et organisations

Objectifs

Il s'agira ici de présenter l'entreprise, son objet social, et sa place centrale dans l'activité économique.
On étudiera la stratégie des firmes et plus largement l'importance des organisations s'inscrivant dans l'évolution des sociétés contemporaines.

2.3.1. Les transformations de l'entreprise et de sa gouvernance depuis le XIXe siècle
2.3.2. Concurrence imparfaite et stratégies des firmes
2.3.3. Éléments de sociologie du travail et des organisations

Commentaires

Les entreprises sont à l'origine des mutations du système productif en même temps qu'elles sont transformées par les évolutions économiques et sociales. L'analyse de la place des entreprises et des entrepreneurs doit permettre de mettre en exergue leur rôle moteur dans l'émergence des nouveaux modes productifs. On s'interrogera sur le rapport de l'entreprise à l'intérêt général.
Il conviendra de s'interroger sur la nature de la firme notamment comme mode d'allocation des ressources, sur l'efficacité des formes organisationnelles et sur les transformations des modes de gouvernance. Cette analyse des firmes permettra d'étudier leurs stratégies dans le cadre de la concurrence imparfaite (monopole, oligopole, concurrence monopolistique, cartels, abus de position dominante, barrière à l'entrée).
Les éléments de sociologie du travail et des organisations permettront d'étudier comment les individus organisent leurs relations et comment les acteurs coordonnent leurs activités. L'analyse se focalisera sur la manière dont la sociologie du travail rend compte de l'organisation du travail, des relations de travail, de la représentation des salariés, des professions et des inégalités professionnelles (sexes, statuts d'emploi). La sociologie des organisations permettra de rendre compte des questions de hiérarchie, autorité, contrôle, coordination et culture d'entreprise. On replacera l'étude du développement des organisations dans son contexte historique.

Module 3. La mondialisation économique et financière

Orientation générale
Ce module vise à étudier le phénomène de la mondialisation en rappelant ses origines historiques et en mettant l'accent sur son amplification et ses spécificités contemporaines. Aux deux premiers chapitres qui traitent des dimensions économique et financière de la mondialisation, s'ajoute un troisième portant sur l'intégration européenne, partie prenante de la dynamique de la mondialisation mais aussi expérience singulière.

3.1/ La dynamique de la mondialisation économique

Objectifs
On retracera l'histoire de l'ouverture des économies depuis le XIX^e siècle et on en dressera un tableau contemporain présentant les tendances majeures et les acteurs principaux. En s'appuyant sur les théories économiques, on mettra en évidence les mécanismes et les vecteurs de la mondialisation et les débats qu'elle suscite.

3.1.1. L'ouverture des économies depuis le XIX^e siècle : évolution et acteurs
3.1.2. L'analyse économique des échanges internationaux
3.1.3. Régionalisation, gouvernance et régulations internationales

Commentaires
On présentera l'évolution des échanges des biens et services, des mouvements de facteurs de production (hommes et capitaux) et des politiques commerciales depuis le XIX^e siècle. On mettra en évidence les spécificités des phénomènes contemporains, notamment le rôle des institutions internationales et le poids croissant des firmes multinationales dont il conviendra d'étudier les stratégies.
On mobilisera et on confrontera données factuelles et théories économiques pour traiter les questions de l'explication du contenu des échanges, des déterminants de la spécialisation, du choix entre libre-échange et protectionnisme. On analysera les différences de performances commerciales entre nations (on s'interrogera notamment sur la pertinence de la notion de compétitivité appliquée à une nation), et les effets de la mondialisation en termes d'emploi et de répartition.
L'étude de la libéralisation multilatérale des échanges et celle des principales expériences d'intégration régionale nourrira un questionnement sur leur compatibilité. On réfléchira aux modalités de la gouvernance et de la régulation de la mondialisation.

3.2/ La dynamique de la mondialisation financière

Objectifs
On montrera que la mondialisation se manifeste aussi par l'émergence d'un marché mondial des capitaux dont on analysera le fonctionnement. On étudiera la façon dont flux réels et flux financiers influencent la formation des cours de change dans le cadre d'un système monétaire international dont on retracera les transformations depuis le XIX^e siècle.

3.2.1. Balance des paiements, cours de change et systèmes de change
3.2.2. L'évolution du système monétaire international depuis le XIX^e siècle
3.2.3. Constitution et fonctionnement du marché international des capitaux

Commentaires
On étudiera la construction de la balance des paiements et on interprétera les différents soldes. En confrontant théories économiques et données factuelles, on s'interrogera sur les déterminants, réels et financiers, de la formation des cours de change. On analysera également les politiques de change et leur influence, et on discutera les forces et faiblesses respectives des différents systèmes de change.
On analysera les fonctions d'un système monétaire international, puis on présentera les différents systèmes qui se sont succédé depuis le XIX^e siècle en étudiant les débats dont ils ont été l'objet.
On étudiera l'évolution des mouvements de capitaux depuis le XIX^e siècle, et on s'interrogera sur leur développement contemporain et ses effets sur l'allocation du capital à l'échelle mondiale.
On analysera le processus de globalisation financière. Dans cette optique on présentera brièvement les principaux segments du marché international des capitaux (marchés des taux d'intérêt, des changes, des actions et des matières premières), les différentes catégories d'opérateurs et les principaux instruments cotés, On mettra en évidence les interconnexions entre les différents segments et acteurs du marché.

3.3/ L’intégration européenne

Objectifs

On présentera et analysera l’exemple le plus abouti d’intégration régionale : l’Union européenne. On montrera que ce projet européen s’est construit progressivement, au fil des traités, des conflits et des accords, pour arriver à l’union économique et monétaire, symbolisée par l’adoption de la monnaie unique. On s'interrogera sur la possibilité de créer une Europe sociale.

3.3.1. La dynamique de la construction européenne
3.3.2. L’Europe économique et monétaire
3.3.3. L’Europe sociale

Commentaires

On partira du questionnement, mené à partir des années 1950, autour du projet européen. On étudiera les réalisations de l’Europe, tant dans le domaine économique que dans le domaine monétaire. On étudiera les progrès de l’intégration économique et les problèmes auxquels l’Union est aujourd’hui confrontée notamment du fait de son hétérogénéité et des évolutions de son périmètre géographique. On traitera les problèmes et les débats liés à l’adoption et à l’existence d’une monnaie unique. On abordera la question de la gouvernance de l’Union, principalement à travers les questions budgétaires et monétaires. Les questions purement institutionnelles, si elles peuvent être abordées, ne relèvent pas directement de ce programme.
On abordera la question de l’Europe sociale à travers les instruments de coordination et d’harmonisation déjà mis en place en matière d’emploi et de politiques sociales. On s’interrogera sur la nature du modèle social européen.

Module 4 : Déséquilibres, régulation et action publique

Orientation générale

Ce module est centré sur les déséquilibres économiques, sur leurs conséquences économiques et sociales, et sur l’intervention des pouvoirs publics. On étudiera les déséquilibres que constituent l’inflation et le chômage et on présentera la manière dont les grands modèles macroéconomiques conçoivent la notion d’équilibre. On étudiera l’intervention publique en matière économique et les contraintes auxquelles elle se heurte. La troisième partie sera consacrée à l’étude des politiques sociales.

4.1/ Équilibres et déséquilibres macroéconomiques

Objectifs

On étudiera les grands déséquilibres macroéconomiques que sont l’inflation et le chômage. On s'interrogera sur la construction des indicateurs et sur les analyses théoriques permettant d’expliquer ces déséquilibres. Cette approche sera complétée par une étude des grands modèles d’équilibre macroéconomiques.

4.1.1. L’inflation et le chômage
4.1.2. L’équilibre macroéconomique à travers les modèles : IS-LM / IS-LM-BP / OGDG

Commentaires

On retracera les principales tendances de l’évolution des prix depuis le XIXe siècle, et on mobilisera les théories économiques sur l'inflation et la déflation, tant pour proposer des explications de ces phénomènes, que pour en évaluer les conséquences.
On montrera que la nature et l’intensité du chômage ont beaucoup varié dans le temps et dans l’espace. On abordera les différentes approches théoriques. On exposera les explications issues de l’arbitrage inflation / chômage : interprétations keynésiennes, puis interprétations classiques qui seront l’occasion de présenter les anticipations adaptatives, puis les anticipations rationnelles. On présentera enfin les analyses les plus récentes sur le chômage et l'emploi.
On présentera les principes de construction des courbes IS et LM en économie fermée, en montrant comment les déplacements des courbes rendent compte des politiques conjoncturelles. On introduira à cette occasion la notion de multiplicateur. On construira le modèle IS-LM-BP.
On présentera les principes de construction des courbes d’offre globale et de demande globale, le rôle joué par les anticipations et la rigidité des prix et des salaires dans la forme des courbes.

4.2/ L’intervention économique des pouvoirs publics

Objectifs

En mobilisant des exemples historiques et contemporains, on étudiera l’intérêt et les limites de l’intervention économique des pouvoirs publics. On analysera ensuite les politiques économiques conjoncturelles et structurelles, leurs effets et les contraintes auxquelles elles sont soumises.

4.2.1. Fluctuations économiques et politiques de régulation des cycles
4.2.2. Politiques structurelles et interventions de l’État face aux défaillances de marché
4.2.3. Les contraintes auxquelles se heurtent les politiques économiques

Commentaires

On montrera que la croissance économique a été marquée depuis le XIXe siècle par des fluctuations économiques et des crises auxquelles les pouvoirs publics ont dû répondre. On mettra l’accent sur les politiques de régulation menées depuis le début des années 1930. On analysera les politiques fiscales, budgétaires et monétaires, qui visent à prévenir les crises et à lutter contre les récessions. On soulignera l’importance des crises financières et la diversité de leurs origines et manifestations et on présentera les différentes solutions proposées par les pouvoirs publics pour limiter le risque d’occurrence de nouvelles crises.
On étudiera les politiques qui visent à accroitre la croissance potentielle des économies et leur compétitivité, à limiter les imperfections de la concurrence, mais aussi à corriger les externalités négatives et préserver la soutenabilité de cette croissance.
On montrera que ces politiques, qui ne s’exercent plus seulement dans un cadre national mais recouvrent également des actions coordonnées notamment au niveau européen, sont soumises à des contraintes et sont l’objet de controverses. On s’interrogera en particulier sur la soutenabilité de la dette publique, et sur la contrainte extérieure.

4.3/ Les politiques sociales

Objectifs

On étudiera les fondements de la légitimité de l'intervention sociale des pouvoirs publics. On montrera que les débats depuis le XIXe siècle influencent les politiques de lutte contre les inégalités et produisent des modèles différents d'État-providence et de protection sociale.

4.3.1. Justice sociale et légitimation de l’intervention publique
4.3.2. Les politiques de lutte contre les inégalités
4.3.3. Etat-providence et protection sociale

Commentaires

On mettra en évidence les différentes voies qu’ont pu emprunter les pays industrialisés pour faire émerger les grands systèmes d’État social et les difficultés auxquelles ils sont confrontés aujourd’hui.
On étudiera les principaux débats en matière de conception de la justice sociale et d’intervention des pouvoirs publics dans ce domaine. On analysera notamment l’influence des conceptions de la justice sociale sur le traitement des inégalités et de l’exclusion ainsi qu’en matière de lutte contre la pauvreté. On montrera comment ont évolué dans le temps les termes du débat entre performances économiques d’une part et protection et justice sociales d’autre part.
On étudiera les grands types de politique de lutte contre les inégalités, leurs effets et les contraintes qui pèsent sur elles.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe IV
Programmes d'histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain
1ère et 2nde années

Programme d’histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain (HGGMC)

CPGE économique et commerciale

Les orientations générales du programme

Le programme d’histoire, géographie et géopolitique du monde contemporain (HGGMC) de la filière économique et commerciale, voie générale, s’inscrit dans la continuité de celui de 2013 en tenant compte de la rénovation des programmes d’histoire-géographie de l’enseignement secondaire, de l’introduction d’un enseignement de spécialité du cycle terminal des lycées en histoire, géographie, géopolitique et sciences politiques, ainsi que du renouvellement des approches méthodologiques et conceptuelles intervenues depuis.

Le programme est structuré en quatre modules semestriels, dont le premier a pour objectif de marquer la transition entre l’enseignement secondaire et l’enseignement supérieur. Chaque module est accompagné d’un commentaire qui précise les finalités de l’enseignement, l’esprit du programme et le cadre dans lequel il peut être traité.

L’ensemble du programme favorise l’adaptation des étudiants aux méthodes de l’enseignement supérieur. Il s’inscrit dans les modalités de parcours des études supérieures de l’espace européen, telles qu’elles sont définies par les textes en vigueur. Il prend également en compte les objectifs de formation des écoles de management, notamment en favorisant une réflexion d’ensemble sur le monde contemporain. *In fine*, ce programme vise à favoriser la maîtrise de compétences décisives pour de futurs entrepreneurs destinés à travailler dans un monde complexe : ouverture culturelle et recul critique, analyse interdisciplinaire et capacité à la synthèse.

Le programme propose d’articuler les approches historique, géographique, géoéconomique et géopolitique

Le programme d’histoire-géographie-géopolitique du monde contemporain est placé sous le signe de l’hybridation des savoirs, sans pour autant confondre leurs démarches respectives. Interdisciplinaire dans son esprit, il doit permettre aux étudiants d’approcher la complexité du monde contemporain.

La démarche géopolitique constitue le fil directeur du programme. Conçue comme un champ disciplinaire, elle permet de combiner les dimensions historiques, géographiques et géoéconomiques pour étudier les rivalités de pouvoirs et d’influences qui s’exercent sur les territoires à toutes les échelles et qui structurent le monde contemporain. Elle insiste sur les jeux d’acteurs, leurs systèmes de représentation et leurs stratégies.

Dans cette optique, l’enseignement de l’histoire permet une mise en perspective des analyses sur le temps long du XX^{e} siècle. Il ne se réduit donc pas à une simple étude chronologique des faits économiques et sociaux mais s’inscrit dans un cadre plus large, à l’écart de toute modélisation abusive. Il prend notamment en compte les aspects politiques, économiques et culturels, scientifiques et techniques.

Les orientations de l'enseignement de la géographie inscrivent la géopolitique dans ses dimensions spatiales et territoriales. La préférence accordée en seconde année à la dynamique géographique, géoéconomique et géopolitique des aires régionales et des continents favorise une vision des lignes de force de l'évolution du monde actuel. Elle impose une démarche à plusieurs échelles, qui permet notamment d'appréhender les dimensions du jeu des réseaux dans le monde contemporain.

L'organisation du programme et de l'évaluation

La dimension synthétique du programme permet de consacrer le temps de la classe à l'acquisition et à la maîtrise de connaissances, de concepts, de méthodes et d'outils qui fondent une réflexion critique sur la complexité du monde contemporain. Le travail prend tout son sens quand le cours est centré sur un chapitre court, ouvert par une introduction problématisée et clos par une conclusion de mise en perspective. Cette démarche accroît la capacité d'argumentation et de synthèse des étudiants, qualités si importantes dans les métiers auxquels ils se préparent. Le travail personnel devient ainsi davantage l'occasion d'un élargissement par l'indispensable lecture de médias ou d'ouvrages qui complètent le cours du professeur et permettent la construction d'une culture générale la plus large possible.

La prise en compte des orientations historiques, géographiques, géoéconomiques et géopolitiques renouvelées conduit le professeur à une réflexion épistémologique indispensable à l'étude des questions abordées. Le programme constitue ainsi un outil de réflexion opératoire et contribue à développer les compétences d'analyse approfondie des situations.

Les quatre modules du programme constituent un ensemble étudié en deux années de préparation aux concours dont les conditions sont fixées dans les règlements pédagogiques des écoles de management. Les modules sont des acquis capitalisables en université.

A travers le programme et les méthodes étudiés, l'HGGMC contribue à la maîtrise de plusieurs compétences essentielles en école de management et dans le monde professionnel :

- combiner les apports de plusieurs champs disciplinaires pour comprendre, nuancer et synthétiser la complexité d'une situation ;
- être un acteur critique du monde contemporain ;
- être capable de raisonner à des échelles d'espace et de temps différentes :
- savoir poser une problématique et y répondre par une démonstration appropriée ;
- s'initier à la prospective et à ses limites ;
- comprendre les points de vue et les enjeux d'acteurs différents ;
- pouvoir s'exprimer de manière efficace et rigoureuse à l'écrit et à l'oral.

PROGRAMME DE PREMIERE ANNEE

Les deux premiers modules dressent un panorama du XX^{e} siècle et du début du XXI^{e} siècle sous l'angle géopolitique et économique. Ils fixent les principaux repères historiques nécessaires à la compréhension du monde contemporain. Ils sont centrés sur l'analyse d'un monde en mutations, de la veille de la Première Guerre mondiale à la mondialisation contemporaine. Une place toute particulière est accordée à l'étude de la France.

Module I.

Les grandes mutations du Monde de 1913 à nos jours

I.1. Panorama géopolitique du monde de 1913 à la fin de la guerre froide
I.1.1. Géopolitique et relations internationales : une introduction
I.1.2. Tableaux géopolitiques du monde en 1913, 1939 et en 1945
I.1.3. Géopolitique de la guerre froide, de la décolonisation et des conflits jusqu'aux années 1990

I.2.Le monde depuis les années 1990 : entre ruptures et recompositions géopolitiques
1.2.1. Tableau géopolitique du monde à la fin de la guerre froide
1.2.2. Le monde actuel : ordre et désordre, émergences et rééquilibrages, espaces de paix et espaces de guerres
1.2.3. La gouvernance mondiale : crises et redéfinitions

I.3. L'économie mondiale d'un siècle à l'autre
I.3.1. La croissance et le développement : une introduction
I.3.2. Économie, croissance et sociétés dans les pays occidentaux de 1913 à 1945
I.3.3. Les modèles de croissance de 1945 à nos jours

Commentaire

Le premier module propose un ensemble de perspectives permettant de saisir les grandes mutations survenues depuis les débuts du XX^{e} siècle. Il est aussi l'occasion d'acquérir progressivement, en ce premier semestre, les méthodes de travail requises par nos disciplines dans l'enseignement supérieur.

Le premier volet vise à donner un panorama géopolitique non exhaustif du monde de la veille de la Première Guerre mondiale à la fin de la guerre froide. Il débute par une *introduction à la géopolitique et aux relations internationales*, destinée à doter les étudiants d'un cadre conceptuel et épistémologique leur permettant de mieux approcher l'ensemble du programme. Il propose ensuite trois tableaux géopolitiques du monde : *le monde en 1913* souligne le rôle d'une Europe divisée et inégalement industrialisée dans le contexte d'une phase nouvelle de la mondialisation et des « impérialismes ». *Le monde en 1939* présente un monde instable, fracturé, fragilisé par la crise des années 1930 et l'arrivée au pouvoir de régimes autoritaires et totalitaires. Après une présentation du *monde en 1945*, l'étude géopolitique de la guerre froide, de la décolonisation et des conflits jusqu'aux années 1990 s'effectue dans une optique de synthèse et non d'énumération factuelle.

Le deuxième volet est centré sur l'analyse des ruptures et recompositions géopolitiques mondiales depuis le début des années 1990. Il débute par un tableau géopolitique du monde à la fin de la guerre froide abordant le basculement d'un ordre bipolaire à un ordre géopolitique dominé par les États-Unis, puissance par ailleurs économiquement dominante de la triade dans les années 1990. Cette partie analyse comment l'épuisement relatif de cet ordre mondial a débouché sur un monde aux désordres multiples, aux conflits nouveaux, avec un reclassement des puissances au sein d'un cadre désormais plus éclaté que multipolaire, où certains accords bilatéraux et internationaux, notamment de désarmement, sont remis en cause. Enfin, il considère la question de l'adaptation de la gouvernance mondiale aux enjeux de notre temps.

Le troisième volet est consacré à l'évolution économique mondiale depuis le début du XX^{e} siècle ; il débute par une introduction à l'étude des rapports entre croissance et développement. Une deuxième partie présente les évolutions économiques et sociales dans les pays occidentaux de 1913 à 1945, entre croissance et crise, mondialisation et replis protectionnistes et deux conflits mondiaux. Enfin, les grandes mutations économiques mondiales depuis 1945 sont analysées au prisme des grands modèles de croissance – notamment libérale et communiste. Une place particulière doit être réservée au décollage inégal des économies émergentes depuis la fin du XX^e siècle.

Dans l'ensemble de ce module, on prend appui sur des exemples variés dans l'espace sans négliger le cas de la France dont une étude plus particulière est prévue dans le deuxième module.

Module II.

La mondialisation contemporaine : rapports de force et enjeux

II.1. La mondialisation : acteurs, dynamiques et espaces
II.1.1. La mondialisation : une introduction
II.1.2. Les acteurs et leurs stratégies
II.1.3. Nouvelles frontières, nouveaux territoires et limites de la mondialisation

II.2. Les défis du développement et les enjeux d'un monde durable
II.2.1. Les défis géopolitiques et géoéconomiques du développement durable
II.2.2. Les ressources, un enjeu stratégique
II.2.3. Les défis géopolitiques et géoéconomiques du changement climatique

II.3. La France, une puissance en mutations depuis les années 1990
II.3.1. La France : un modèle entre héritages, crises et transformations face à la mondialisation
II.3.2. La France : une puissance européenne
II.3.3. La France : une puissance mondiale et maritime

Commentaire

Le deuxième module fournit les principales clés de compréhension du monde sous un angle géoéconomique et géopolitique.

La première partie débute par une introduction à la mondialisation contemporaine devant permettre d'abord l'étude de ses caractéristiques principales : l'essor des flux commerciaux, financiers, humains, d'informations ; ses principaux vecteurs – notamment la baisse des obstacles tarifaires et du coût des transports ; le rôle décisif de la « maritimisation » du monde dans cette phase de mondialisation. Cet ensemble aboutit à un monde certes en réseau mais aussi parcouru de fractures. Une analyse des acteurs – étatiques comme non-étatiques – et de leurs stratégies sur les différents échiquiers de la mondialisation mettra notamment l'accent sur la guerre et la paix économiques pour les États, les concurrences et les partenariats pour les entreprises, les réseaux qui parcourent les sociétés et diffusent l'information. Le rôle des organisations multilatérales mais aussi des opinions publiques sera souligné. Cette partie s'achèvera sur une étude de la dimension géographique de la mondialisation autour des nouvelles frontières et des nouveaux territoires : mers et océans, espace et cyberespace, mutation du rôle des frontières…

La mondialisation est un processus complexe d'interconnexion des différentes parties du monde qui présente aujourd'hui des limites. Elle a fait prendre conscience d'un certain nombre d'enjeux globaux qui ont des impacts majeurs. A ce titre, et dans cette perspective, trois d'entre eux seront étudiés. Les *défis du développement durable* sont analysés sous le double angle géopolitique et géoéconomique.

Après cette analyse d'ensemble, deux points sont l'objet d'une attention particulière : les *ressources* (leur finitude, les stratégies d'appropriation et d'adaptation pour les acteurs concernés) et le *changement climatique*, dont les différentes dimensions seront abordées.

Pour conclure ce module, une place particulière est accordée à la France contemporaine, de manière à étudier sa situation dans un monde « mondialisé ». Il s'agira d'envisager les mutations du pays et son adaptation au contexte de la mondialisation, en prenant soin de montrer tant les faiblesses que les réussites, à travers l'étude des *crises et des transformations*. Cela permettra d'analyser, ensuite, les caractères, les atouts et les faiblesses de la France comme *puissance européenne* et comme puissance mondiale, en insistant sur ses singularités, notamment son espace maritime.

PROGRAMME DE SECONDE ANNEE

Les modules III et IV privilégient une approche synthétique de la géopolitique des aires régionales et des continents. Les pays cités sont abordés en fonction des déterminants et déclinaisons de leur puissance ainsi que dans leur rapport à leur environnement régional et au reste du monde. Ils ne font pas l'objet d'une étude exhaustive.

MODULE III

Géodynamique de l'Union européenne, de l'Afrique, du Proche et du Moyen-Orient

III.1. L'Union européenne, l'Europe et le monde
III.1.1. L'Union européenne et ses territoires : intégrations et fragmentations
III.1.2. L'Union européenne et son voisinage proche : la Russie et l'espace méditerranéen
III.1.3. L'Union européenne dans le monde

III.2. Le continent africain, le Proche et le Moyen-Orient
III.2.1. États et territoires, cultures et sociétés
III.2.2. Le développement : politiques et enjeux
III.2.3. Géopolitique du continent africain, du Proche et du Moyen-Orient

Commentaire

Le troisième module donne des clefs de compréhension et d'analyse des spécificités et de la complexité des situations qui prévalent aujourd'hui en Europe, sur le continent africain et au Proche et Moyen-Orient. Dans ce but, l'histoire, la géographie, la géoéconomie et la géopolitique sont associées pour offrir une lecture synthétique qui rende compte de manière à la fois précise, nuancée et critique d'une réalité mouvante.

Il s'agit tout d'abord de montrer que l'Union européenne consiste en une tentative toujours renouvelée d'intégrations multiples visant à dépasser les fragmentations héritées et contemporaines, au risque d'en susciter de nouvelles. C'est l'occasion d'expliquer que les élargissements successifs ont pu contribuer à questionner les modalités et la poursuite de l'approfondissement. Ainsi, dans une Union européenne à géométrie de plus en plus variable, assurer l'unité dans la diversité devient un défi de plus en plus complexe. La question de l'identité et de la cohésion de l'Union européenne est alors posée. Le débat entre les visions d'une « Europe marché » et d'une « Europe puissance » est exposé. Cela conduit à étudier la place et le rôle de l'Union européenne au sein du reste de l'Europe, dont *la Russie, de l'ensemble des pays du sud et de l'est de la Méditerranée* ainsi que du *reste du monde*.

Les dynamiques africaines, moyennes et proche-orientales demandent une réflexion sur les effets de la colonisation et de la décolonisation dans la structuration des États, des nations et des territoires. Il est tenu compte de la diversité et de l'ancienneté des cultures. L'importance du défi du développement est posée. Si les stratégies de *développement* mettent en jeu des acteurs locaux et régionaux, le continent africain, le Proche et le Moyen-Orient subissent encore les contraintes de la dépendance et parfois des ingérences. La faiblesse des intégrations régionales et les multiples fragmentations qui déstabilisent les territoires gênent l'affirmation de cette région dans le monde sont démontrées.

MODULE IV

Géodynamique continentale des Amériques et de l'Asie

IV.1. Les Amériques
IV.1.1. Géopolitique des Amériques
IV.1.2. Les États-Unis : société, politique et puissance à l'époque contemporaine
IV.1.3. L'Amérique latine : émergences et crises

IV.2. L'Asie
IV.2.1. Géopolitique d'une région multipolaire
IV.2.2. Les espaces asiatiques dans la mondialisation
IV.2.3. Deux géants asiatiques : la Chine, puissance mondiale, l'Inde, puissance émergente

Commentaire

L'étude des Amériques débute par une *géopolitique régionale* qui permet de mettre en évidence les relations entre l'Amérique anglo-saxonne et l'Amérique latine à l'époque contemporaine. L'attention est attirée sur le fait que le grand nombre des initiatives d'intégrations régionales révèle le jeu des ambitions de plusieurs États, dont le Brésil, sur un continent marqué par des fragmentations culturelles, politiques et de développement. *Les États-Unis*, du fait de profondes transformations intérieures et de leur exercice de la puissance, font l'objet d'une analyse spécifique. En *Amérique latine*, on explique combien les stratégies successives de développement mises en œuvre ont abouti à des processus d'émergence souvent éphémères, incomplets et émaillés de crises.

L'étude de l'Asie, région multipolaire, débute par sa géopolitique interne et externe. Cela suppose une présentation des États, des sociétés ainsi que de la diversité politique et culturelle dans le cadre d'une mise en perspective et des relations de pouvoir sur le temps long, de manière à mettre en évidence la dimension géopolitique et l'articulation entre les États.

L'importance et le rôle de certains pays non cités, dont le Japon, sont soulignés. La place montante de *l'Asie dans la maritimisation et la mondialisation*, l'importance de ses métropoles, de ses façades et de ses enjeux maritimes sont mises en valeur. La puissance géoéconomique et géopolitique des *deux géants asiatiques* fait l'objet d'une analyse particulière. L'accent est mis sur la Chine comme puissance mondiale, en soulignant les liens étroits entre la société et la politique chinoises au regard de ses ambitions mondiales. Quant à l'Inde, elle est étudiée comme puissance émergente et possible géant de demain.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale ECG

Annexe V

Programme de lettres et philosophie

1ère et 2nde années

CPGE économiques et commerciales
Programme « Lettres et Philosophie »

Objectifs de formation

Commun à l'ensemble des classes préparatoires économiques et commerciales, cet enseignement, qui implique à part égale les Lettres et la Philosophie, est partie constituante de la formation générale des étudiants.
Sa finalité est de former les élèves à une réflexion autonome et éclairée, par la lecture ample et directe d'œuvres de littérature et de philosophie, par l'étude des arts et des techniques, et par la pratique régulière de travaux écrits et oraux. Les étudiants développent ainsi leurs capacités à s'interroger, à conduire une pensée cohérente et à tirer profit avec finesse et pertinence de leurs connaissances.

L'enseignement « Lettres et Philosophie » a trois objectifs majeurs :

1. il permet aux élèves d'enrichir leur culture et de mieux comprendre le monde dans lequel ils vivent ;
2. il les entraîne à développer leur réflexion personnelle, ainsi qu'à aiguiser leur sens critique ;
3. il vise à développer la maîtrise de l'expression écrite et orale ainsi que l'aptitude à communiquer, compétences indispensables pour la future vie professionnelle des étudiants.

Les exercices écrits sont pris en charge collégialement par les deux professeurs de Lettres et de Philosophie.

Programme

Chaque professeur détermine librement et en pleine responsabilité, selon les parcours intellectuels et les choix pédagogiques qui répondent aux besoins des élèves, les œuvres philosophiques, littéraires ou relevant de l'ensemble des arts, dont il juge l'étude nécessaire à son enseignement. Les deux professeurs, de Lettres et de Philosophie, s'accordent pour assurer la cohérence d'ensemble de l'enseignement dispensé.

Première année

Le programme permet d'élargir et d'enrichir les connaissances acquises au cours des études secondaires, et de consolider la culture nécessaire à une réflexion personnelle. Il s'inscrit dans la continuité des enseignements de tronc commun, Lettres ou Philosophie, mais également d'un enseignement de spécialité comme « Humanités, Littérature et Philosophie ».
L'enseignement tient compte des relations qui unissent les notions ou les concepts à leur histoire, aux contextes et résonances à travers lesquels se sont précisés leur usage et leur

sens. On rapporte ainsi l'étude des œuvres littéraires, artistiques ou philosophiques aux représentations mythologiques, religieuses, esthétiques, ainsi qu'à l'histoire des sciences, des arts et des techniques.

Ce programme est constitué des rubriques suivantes :
- l'héritage de la pensée grecque et latine ;
- les apports du judaïsme, du christianisme et de l'islam à la pensée occidentale ;
- les étapes de la constitution des sciences exactes et des sciences de l'homme ;
- l'essor technologique, l'idée de progrès ;
- la société, le droit et l'Etat modernes ;
- les figures du moi et la question du sujet depuis la Renaissance ;
- l'esprit des Lumières et leur destin ;
- quelques grands courants artistiques et esthétiques depuis la Renaissance ;
- les principaux courants de pensée contemporains.

Les rubriques sont abordées selon un parcours que les professeurs de Lettres et de Philosophie déterminent ensemble, en fonction de regroupements et de problématiques dont ils ont l'initiative et la responsabilité.

Seconde année

Etude d'un thème renouvelé chaque année par arrêté conjoint du ministre chargé de l'éducation et du ministre chargé de l'enseignement supérieur.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière économique

Voie générale
ECG

Annexe VI
Programmes de langues vivantes étrangères
1ère et 2nde années

Objectifs de formation

L'enseignement des langues vivantes en classes préparatoires économiques et commerciales constitue un volet essentiel de la formation générale. La raison en est claire : les carrières auxquelles se destinent les étudiants des écoles de management ont une dimension internationale et interculturelle.

Dans cette perspective, l'enseignement obligatoire de deux langues vivantes est proposé aux étudiants afin qu'ils acquièrent les compétences linguistiques et les connaissances culturelles nécessaires à leur insertion professionnelle et à leur ouverture au monde.

Les niveaux de compétences ciblés en fin de 2de année sont C1 pour la LVA, notamment dans les compétences de réception, et B2-C1 pour la LVB.

L'étude des langues vivantes, dans toutes les classes préparatoires économiques et commerciales, a comme objectifs :

- de consolider et d'approfondir les compétences de l'enseignement du second degré, dans le prolongement des enseignements du cycle terminal (en tronc commun et, le cas échéant, en enseignement de spécialité LLCER), sur le plan linguistique et culturel ;
- de faire travailler la langue en contexte sur la base de supports variés ;
- de faire acquérir aux étudiants un niveau plus élevé de compréhension et d'expression, tant à l'écrit qu'à l'oral ; le développement des compétences orales et oratoires en langue étrangère – prise de parole en continu et en interaction – fait l'objet d'une attention particulière et d'un entraînement régulier ;
- d'assurer la mise en place des repères culturels indispensables à la connaissance de la civilisation et de la culture des pays concernés, de façon à éclairer les réalités économiques, sociales et politiques du monde contemporain ; on proposera, le cas échéant, des thématiques croisées avec d'autres disciplines ;
- d'apprendre à utiliser des ouvrages et des outils de référence, d'approfondir les compétences acquises précédemment pour rechercher, sélectionner et exploiter des documents. Les ressources et outils numériques sont utilisés avec profit ;
- d'entraîner à la traduction de textes variés, à la compréhension fine de documents, et à différents types de production écrite.

Organisation des enseignements

Le premier semestre est conçu pour aider les étudiants, dans leur diversité, à réussir la transition entre le lycée et les études supérieures. Il aura une fonction bien particulière, dont l'objectif essentiel est la prise en charge individualisée et l'homogénéisation du niveau des étudiants, en tenant compte, pour le compenser le cas échéant, de leur historique de formation dans chacune des deux langues étudiées.

Pour cela, les premiers mois devront être axés sur :

- un travail de la langue et sur la langue en contexte ;
- l'accès progressif à une compréhension fine, à l'écrit comme à l'oral ;
- l'acquisition d'une expression maîtrisée et adéquate ;
- l'acquisition d'une méthode adaptée aux différents savoir-faire visés.

Dans le cadre de la liberté pédagogique, le professeur choisit ses méthodes et sa progression. Il organise son enseignement en suivant deux principes directeurs :

a) le professeur choisit le contexte, les problématiques et les méthodes qui favorisent les apprentissages et diversifie les modes d'acquisition des savoirs et des compétences. Il explicite pour les élèves les objectifs poursuivis, les méthodes utilisées et les critères d'évaluation ;

b) le professeur privilégie la mise en activité des étudiants : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. Ils sont amenés à manipuler la langue, les notions et les concepts en exerçant leur esprit critique. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants.