EDL1 :

Exercice 1. On considère pour $a \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) s'écrivant

$$y' + ay = 0$$

1. Déterminer une solution de la forme $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{rt}$, où r est un nombre réel.
2. Si y est une solution de (E), on considère la fonction z définie pour t réel par $z(t) = y(t)\mathrm{e}^{at}$. Calculer z' et en déduire la forme générale des solutions.

Correction

Exercice 2. Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 2$.

$$(E) : y' + 2y = \mathrm{e}^t$$

Correction

Exercice 3. Déterminer les fonctions numériques y solutions sur $\mathbb{R}$ des EDL suivantes :

1. $(E_1) : y'(t) + y(t) = t^2 + t$
2. $(E_2) : y'(t) + y(t) = t\mathrm{e}^t$
3. $(E_3) : y'(t) + 2y(t) = t\mathrm{e}^{-2t}$

Correction

Exercice 4. Soit a et b deux réels strictement positifs. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E) : y'(t) = y(t)(1 - by(t))$$

1. Déterminer les solutions constantes de cette équation.
2. On admet maintenant que les solutions non nulles de (E) ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}$.
   (a) On se donne y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer la fonction $z = \dfrac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle $(E_1) : z'(t) = cz(t) + d$ où les réels c et d sont à déterminer.
   (b) Résoudre l'équation différentielle (E_1).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E)
4. Déterminer les limites en $+\infty$ des solutions.

Correction

EDL2 :

Exercice 5. On considère pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) du second ordre s'écrivant

$$y'' + ay' + by = 0$$

1. Déterminer une solution de la forme $t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{rt}$, où r est un nombre réel.
2. En utilisant le changement d'inconnue $y(t) = z(t)\mathrm{e}^{rt}$ déduire la forme générale des solutions, où r est la solution précédemment trouvée.

Correction

Exercice 6. Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

$$(E) : y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^t$$

Correction

Exercice 7. Déterminer les fonctions numériques y solutions sur $\mathbb{R}$ des EDL suivantes :

1. $(E_1) : y'' - 2y' = 2 + t$
2. $(E_2) : y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^t$
3. $(E_3) : y'' + y' - 2y = t + \mathrm{e}^t$

Correction

Exercice 8. On considère le système différentiel défini sur $\mathbb{R}$ par du système différentiel

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1' = -0{,}9\,x_1 + 0{,}2\,x_2 \\ x_2' = 0{,}9\,x_1 - 0{,}6\,x_2 \end{cases} .$$

1. Montrer que si (x_1, x_2) est solution de $(\mathcal{S})$ alors x_1 vérifie

$$(E) : x_1'' + 1,5x_1' + 0,36x_1 = 0$$

2. Déterminer alors la forme générale des solutions de (E) puis de $(\mathcal{S})$.
3. Déterminer les solutions de $(\mathcal{S})$ vérifiant $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 2$

Correction

Correction :

EDL1 :

Exercice 1. 1. Pour tout t réel, y est dérivable et

$$y'(t) + ay = r\mathrm{e}^{rt} + a\mathrm{e}^{rt} = (r+a)\mathrm{e}^{rt}$$

y vérifier l'équation (E) pour tout t signifie que r est solution de $r + a = 0$. Inversement, si r est solution de $r + a = 0$ alors y définie par $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$ pour tout t réel est solution de (E).
En résumé , les solutions de (E) de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ sont solutions lorsque $r = -a$.

2. Si y est solution de (E), y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc z l'est comme produit de fonctions dérivables.
$y'(t) = -a\mathrm{e}^{-at}z(t) + \mathrm{e}^{-at}z'(t)$
$y'(t) + ay(t) = (-a+a)\mathrm{e}^{rt}z(t) + \mathrm{e}^{-at}z'(t) = \mathrm{e}^{rt}z'(t)$
y est solution de (E) lorsque $z' = 0$ soit z est une constante. Ainsi y s'écrit pour tout t réel $y(t) = C\mathrm{e}^{-at}$.

Exercice 2. Résolution de (E) :
L'équation homogène s'écrit

$$y' + 2y = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_H(t) = C\mathrm{e}^{-2t}.$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = \mathrm{e}^t$.
Ainsi $y_p'(t) = C\mathrm{e}^t$.
En remplaçant dans l'équation (E) et en identifiant on obtient :

$$y_p'(t) + 2y_p(t) = Ce^t + 2Ce^t = 3Ce^t$$

Soit

$$3Cae^t = e^t$$

ce qui donne $C = \dfrac{1}{3}$.
En conclusion, les solutions de l'équation complète (E) s'écrivent :

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$$

On cherche maintenant la valeur de la constante C :
$f(1) = C\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}$ donc $f(1) = C\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{1}{3}\mathrm{e}$ soit $C = \frac{(-\mathrm{e}^1+6)\mathrm{e}^2}{3}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{(-\mathrm{e}^1+6)\mathrm{e}^{-2x+2}+\mathrm{e}^x}{3}$.

Exercice 3. Résolution de (E_1) :
L'équation homogène s'écrit

$$y' + y = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_H(t) = C\mathrm{e}^{-t}.$$

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_p(t) = at^2 + bt + c$.
Ainsi $y_p'(t) = 2at + b$.
En remplaçant dans l'équation (E_1) et en identifiant on obtient :

$$y_p'(t) + y_p(t) = 2at + b + at^2 + bt + c = t^2 + t$$

Soit $a = 1t$, $2a + b = 1$ et $b + c = 0$ ce qui donne $b = -1$ et $c = 1$.
En conclusion, les solutions de l'équation complète (E_1) s'écrivent :

$$\boxed{y(t) = Ce^{-t} + t^2 - t + 1}$$

Résolution de (E_2) :
L'équation homogène s'écrit

$$y' + y = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_H(t) = Ce^{-t}.$$

On cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_p(t) = (at+b)e^t$.
Ainsi $y_p'(t) = ae^t + (at+b)e^t$.
En remplaçant dans l'équation (E_2) et en identifiant on obtient :

$$y_p'(t) + y_p(t) = (at+b)e^t + ae^t + (at+b)e^t = te^t$$

Soit $2at = 1$ et $a + 2b = 0$ ce qui donne $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$.
En conclusion, les solutions de l'équation complète (E_1) s'écrivent :

$$\boxed{y(t) = Ce^{-t} + (\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4})e^t}$$

Résolution de (E_3) :
L'équation homogène s'écrit

$$y' + 2y = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_H(t) = Ce^{-2t}.$$

On cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_p(t) = t(at+b)e^{-2t} = (at^2+bt)e^{-2t}$.
Ainsi $y_p'(t) = (2at+b)e^t - 2(at^2+bt)e^t$.
En remplaçant dans l'équation (E_2) et en identifiant on obtient :

$$y_p'(t) + y_p(t) = (2at+b)e^t - 2(at^2+bt)e^t + 2((at^2+bt)e^{-2t}) = te^{-2t}$$

Soit $2a = 1$ et $b = 0$ ce qui donne $a = \dfrac{1}{2}$.
En conclusion, les solutions de l'équation complète (E_1) s'écrivent :

$$\boxed{y(t) = Ce^{-2t} + \tfrac{1}{2}te^{-2t}}$$

Exercice 4.

1. Les trajectoires d'équilibre d'une équation différentielle sont les solutions constantes égales à un réel C, on résout : $aC(1-bC) = 0$ soit $C = \dfrac{1}{b}$ ou $C = 0$.
   On en conclut que les deux seules trajectoires d'équilibre de cette équation sont la fonction constante égale à 0 et la fonction constante égale à $\frac{1}{b}$
2. (a) z est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule jamais. De plus, on a :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$$

   La fonction y étant solution de (E), on a :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = ay(t)(1 - by(t))$$

   On en déduit que

   $$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = -\frac{ay(t)(1-by(t))}{(y(t))^2}$$

   ou encore

   $$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = -\frac{ay(t) - ab(y(t))^2}{(y(t))^2}$$

   en simplifiant

   $$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = -\frac{a}{y(t)} + ab = -az(t) + ab$$

   que : $c = -a$ et $d = ab$

   (b) L'équation différentielle homogène associée à (E_1) est : $z' + az = 0$. Les solutions de cette dernière équation sont du type $z : t \mapsto \lambda e^{-at}$, avec λ réel. La fonction constante égale à b est une solution particulière de (E). L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est : $\{z : t \mapsto b + \lambda e^{-at}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. On vient donc de prouver que si y est une solution de (E) ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout réel t, $\frac{1}{y(t)} = b + \lambda e^{-at}$, avec λ un réel quelconque. On en déduit qu'alors, pour tout réel t, on a : $y(t) = \frac{1}{b+\lambda e^{-at}}$.
Réciproquement, pour tout réel λ, la fonction $y : t \mapsto \frac{1}{b+\lambda e^{-at}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$(car b est strictement positif). D'une part, pour tout réel t, on a $y'(t) = \frac{a\lambda e^{-at}}{(b+\lambda e^{-at})^2}$. D'autre part, pour tout réel t, on a :
$$ay(t)(1 - by(t)) = \frac{a}{b + \lambda e^{-at}} \times \frac{\lambda e^{-at}}{b + \lambda e^{-at}}$$
On constate que y est bien solution de l'équation différentielle $y'(t) = ay(t)(1 - by(t))$. Finalement, on a bien prouvé que les solutions de l'équation différentielle $y'(t) = ay(t)(1 - by(t))$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \frac{1}{b + \lambda e^{-at}}$$
, où λ est un réel quelconque.
4. Pour tout réel λ, on a : $\lim_{t\to+\infty} \lambda e^{-at} = 0($ car $a > 0)$. On en déduit :
$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{1}{b}$$
Cela signifie que les trajectoires convergent toutes vers la trajectoire d'équilibre non nulle.

EDL2 :

Exercice 5. 1. Pour tout t réel, y est deux fois dérivable et
$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r^2 e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = (r^2 + ar + b)e^{rt}$$
y vérifier l'équation (E) pour tout t signifie que r est solution de $x^2 + ax + b = 0$. Inversement, si r est solution de $ax^2 + ax + b = 0$ alors y définie par $y(t) = e^{rt}$ pour tout t réel est solution de (E).
En résumé , les solutions de (E) de la forme $t \mapsto e^{rt}$ sont solutions lorsque r est solution de $x^2+ax+b = 0$.
On retrouve l'équation caractéristique des équations différentielles linéaires d'ordre 2.

2. Si y est solution de (E), y est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et donc z l'est comme produit de fonctions dérivables.
$y'(t) = re^{rt}z(t) + e^{rt}z'(t)$
$y''(t) = r^2 e^{rt}z(t) + 2re^{rt}z'(t) + e^{rt}z''(t)$
$y''(t) + ay'(t) + by(t) = (r^2 + ar + b)e^{rt}z(t) + (2r + a)e^{rt}z'(t) + e^{rt}z''(t)$
y est solution de (E) lorsque z' est solution de $(2r + a)z'(t) + z''(t) = 0$

- ⋆ Si $2r + a = 0$: alors $z''(t) = 0$ pour tout t ce qui veut dire que z' est une constante, z est alors de la forme $z(t) = Ct + D$ pour tout t réel où C et D sont des constantes réelles. Ainsi y s'écrit pour tout t réel $y(t) = (Ct + D)e^{rt}$. On remarque qu'on retrouve la forme des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 quand le discriminant est nul En effet si $r = -\dfrac{a}{2}$ alors r est solution double et $\Delta = 0$.
- ⋆ Si $2r + a \neq 0$, z' est solution de l'équation (E_1) du premier ordre $x'(t) + 2a + rx(t) = 0$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $x(t) = Ae^{\alpha t}$ pour tout t réel avec $\alpha = -(2r + a)$ et A une constante réelle. En primitivant on trouve la forme de z qui est donnée pour t réel par $z(t) = Be^{-(2r+a)t} + C$ où B et C sont réels. Ce qui donne comme forme à y, $y(t) = Ke^{r_1 t} + Me^{r_2 t}$ avec $r_1 = r$ et $r_2 = -a - r$. Si $r_1 = r$ est une solution de l'équation caractéristique et comme $r_1 + r_2 = -a$ ce qui donne r_2 est la deuxième.

Exercice 6. Résolution de (E) :
L'équation homogène s'écrit
$$y'' - 2y' + y = 0$$
Elle admet comme équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$. Cette équation a un discriminant $\Delta = 0$.
Sa racine double est 1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme
$$y_H(t) = (Ct + D)e^t.$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = at^2\mathrm{e}^t$.
Ainsi $y_p'(t) = 2at\mathrm{e}^t + at^2\mathrm{e}^t$ et $y_p''(t) = 2ae^t + 4ate^t + at^2e^t$.
En remplaçant dans l'équation (E_2) et en identifiant on obtient :

$$(y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) = 2ae^t + 4ate^t + at^2e^t - 2\left(2ate^t + at^2e^t\right) + at^2e^t = e^t$$

Soit

$$2ae^t = e^t$$

ce qui donne $a = \dfrac{1}{2}$.
En conclusion, les solutions de l'équation complète (E) s'écrivent :

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = (Ct + D)e^t + \frac{t^2}{2}e^t$$

On cherche maintenant les valeurs des constantes C et D : $f(0) = (C \times 0 + D)e^0 + \dfrac{0^2}{2}e^0 = D$ donc $D = 1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, f est dérivable et $f'(t) = C\mathrm{e}^t + (Ct + D)\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t + \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^t$ ce qui donne en évaluant en 0, $f'(0) = C + D$. Ainsi $C = -1$.

Exercice 7. Résolution de (E_1) :
L'équation homogène s'écrit

$$y'' - 2y' = 0$$

Elle admet comme équation caractéristique $r^2 - 2r = 0$. Cette équation a pour racine 0 et 2. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_H(t) = C + D\mathrm{e}^{2t}.$$

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_p(t) = t(at + b) = at^2 + bt$.
Ainsi $y_p'(t) = 2at + b$ et $y_p''(t) = 2a$.
En remplaçant dans l'équation (E_2) et en identifiant on obtient :

$$y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) = 2a - 2(2at + b) = 2 + t$$

Soit $2a - 2b = 2$ et $-4a = 1$ ce qui donne $a = -\dfrac{1}{4}$ et $b = -\dfrac{5}{4}$.
En conclusion, les solutions de l'équation complète (E_1) s'écrivent :

$$\boxed{y(t) = y_H(t) + y_p(t) = C + De^{2t} - \frac{t^2}{4} - \frac{5}{4}t}$$

Résolution de (E_2) :
L'équation homogène s'écrit

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Elle admet comme équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$. Cette équation a un discriminant $\Delta = 0$.
Sa racine double est -1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_H(t) = (Ct + D)\mathrm{e}^{-t}.$$

On cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_p(t) = ae^t$.
Ainsi $y_p'(t) = ae^t$ et $y_p''(t) = ae^t$.
En remplaçant dans l'équation (E_2) et en identifiant on obtient :

$$(y_p''(t) + 2y_p'(t) + y_p(t) = ae^t + 2ae^t + ae^t = e^t$$

Soit

$$4ae^t = e^t$$

ce qui donne $a = \dfrac{1}{4}$.
En conclusion, les solutions de l'équation complète (E_2) s'écrivent :

$$\boxed{y(t) = (Ct + D)e^t + \frac{1}{4}e^t}$$

Résolution de (E_3) **:**
L'équation homogène s'écrit

$$y'' + y' - 2y = 0$$

Elle admet comme équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$. Cette équation a un discriminant $\Delta = 9$. Ses racines sont 1 et -2. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_H(t) = C\mathrm{e}^t + D\mathrm{e}^{-2t}.$$

On cherche une solution particulière de $(E_3^1) = y'' + y' - 2y = ate^t$ sous la forme $y_p^1(t) = ate^t$.
Ainsi $y_p'(t) = ae^t + ate^t$ et $y_p''(t) = 2ae^t + ate^t$.
En remplaçant dans l'équation (E_3^1) et en identifiant on obtient :

$$y_p''(t) + y_p'(t) - 2y_p(t) = ate^t + 2ae^t + ae^t + ate^t - 2ate^t = \mathrm{e}^t$$

Soit

$$3ae^t = e^t$$

ce qui donne $a = \dfrac{1}{3}$.
On cherche une solution particulière de $(E_3^2) = y'' + y' - 2y = t$ sous la forme $y_p^1(t) = bt + c$.
Ainsi $y_p'(t) = b$ et $y_p''(t) = 0$.
En remplaçant dans l'équation (E_3^2) et en identifiant on obtient :

$$y_p''(t) + y_p'(t) - 2y_p(t) = b - 2(bt + c)$$

Soit

$$b - 2bt - 2c = t$$

ce qui donne $b = -\dfrac{1}{2}$ et $c = -\dfrac{1}{4}$.

En utilisant le principe de superposition, les solutions de l'équation complète (E_3) s'écrivent :

$$\boxed{y(t) = (Ct + D)e^t + \frac{1}{4}e^t - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}}$$

Exercice 8. ⋆ $(1) : x_1' = -0{,}9\,x_1 + 0{,}2\,x_2 \Leftrightarrow x_2 = 5\,(x_1' + 0,9x_1) \Rightarrow x_2' = 5\,(x_1'' + 0,9x_1')$.

- ⋆ En remplaçant dans l'égalité (2), x_2 et x_2' par les expressions que l'on vient d'établir, on obtient : $5\,(x_1'' + 0,9x_1') = 0{,}9\,x_1 - 0{,}6\,(5\,(x_1' + 0,9x_1)) \Leftrightarrow x_1'' + 1,5x_1' + 0,36x_1 = 0$.
- ⋆ ⋆ Notons $(E) : x'' + 1,5x' + 0,36x = 0$.
  - ⋆ $(C) : r^2 + 1,5r + 0,36 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $-1,2$ et $-0,3$.
    Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions $x_1 : t \mapsto C_1\mathrm{e}^{-1,2t} + C_2\mathrm{e}^{-0,3t}$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

  Ainsi : $\boxed{x_1\,(t) = C_1\mathrm{e}^{-1,2t} + C_2\mathrm{e}^{-0,3t},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.}$

  ⋆ De l'égalité $x_2 = 5\,(x_1' + 0,9x_1)$, on déduit :

$$\boxed{x_2\,(t) = -1,5C_1\mathrm{e}^{-1,2t} + 3C_2\mathrm{e}^{-0,3t},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.}$$