Exercice 1

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

a) $a \in E$ b) $a \subset E$ c) $\{a\} \subset E$
d) $\emptyset \in E$ e) $\emptyset \subset E$ f) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 2

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Etablir

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Exercice 3

Etant donné A et B deux parties de E, justifier

$$\overline{A} \backslash \overline{B} = B \backslash A$$

Exercice 4

Etant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :
a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

Exercice 5

Soient a, b et c trois réels tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \backslash \{a/c\} \to \mathbb{R} \backslash \{a/c\}$ définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$.
Justifier que l'application f est bien définie.
Calculer $f \circ f$, en déduire que f est une application bijective dont on déterminera l'application réciproque.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 7

1. Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.

2. Déterminer de quels intervalles, l'intervalle $[2, 7]$ est l'image par la fonction carrée.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intervalle image J de I par f puis vérifier que f réalise une bijection de I sur J puis préciser f^{-1}

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty, 2]$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$, $I =]-2, +\infty]$.