Exercice 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :
a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$
b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 2. Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :
a) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$
b) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
c) $(x \leqslant 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
d) $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$.

Exercice 3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
a) la fonction f s'annule.
b) la fonction f est la fonction nulle.
c) f n'est pas une fonction constante.
d) f ne prend jamais deux fois la même valeur.
e) la fonction f présente un minimum.
f) f prend des valeurs arbitrairement grandes.
g) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.
Exprimer les négations des assertions suivantes :
a) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
f) $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On considère les assertions suivantes :

$$P : « \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 » , \ Q : « \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 »$$

et

$$R : « \ (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \ \text{ou} \ (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0) \ »$$

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes :

a) $P \Rightarrow Q$ b) $Q \Rightarrow P$ c) $Q \Rightarrow R$
d) $\text{non}(R) \Rightarrow Q$ e) $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$?

Exercice 6. Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 7. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Exercice 8. Soit $m \in \mathbb{R}$. Discuter selon m le nombre de solutions de l'équation

$$mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0.$$

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $(\forall \varepsilon \geqslant 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
b) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 10. Soit $a \in]-1\,;+\infty[$.
1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(1+a)^n \geqslant 1 + na$$
.
2. Ce résultat subsiste-il si $a < -1$? Justifier votre réponse.

Exercice 11.
1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 12. Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n + 1.$$

Exercice 13. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 14 (***). Montrer par récurrence que :
1. pour tout entier $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$.
2. pour tout entier $n \geqslant 6$, $n! \geqslant n^3$.

Exercice 15 (***). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Exercice 16. Soit (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = 2, u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$$

Exercice 17. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

1. $A = 2 + 6 + 10 + 14 + 18$.
2. $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$.
3. $C = 3 - 6 + 9 - 12 + 15$.

Exercice 18. Simplifier les expressions suivante :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2})$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+3})$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1} - a_{2k+3})$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{5k+6} - a_{5k+1})$

Exercice 19. Compléter :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\cdots} a_{\ldots}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k+3} = \sum_{j=\cdots}^{\cdots} a_j$

Exercice 20. Calculer les sommes suivantes en fonction de n :

$$A = \sum_{k=1}^{n} 2k \qquad B = \sum_{k=0}^{n}(5k-1) \qquad C = \sum_{k=2}^{n+2}(k-2)^2$$
$$D = \sum_{k=2}^{n+2}(k-2)(1-k)$$

Exercice 21. Calculer les sommes suivantes en fonction de n :

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{k-1}} \qquad B = \sum_{k=0}^{n}(2 \times 7^k - 3 \times 7^{k+1})$$
$$C = \sum_{k=2}^{n} 3^{2k-1}$$

Exercice 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+3}$.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $\dfrac{2k-1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 24. Les but de cet exercice est de calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ sans utiliser la récurrence :

1. (a) vérifier que $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$.
   (b) En déduire le calcul de S_n.
2. (a) vérifier que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
   (b) En déduire le calcul de T_n.
3. Comment procéderiez pour caluler $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$?