

Exercice 1. Calculer et mettre sous forme irréductible les expressions suivantes :

$$1. A = \frac{5}{6} - \frac{7}{18} + \frac{3}{5}$$

$$2. B = \left(5 - \frac{3}{8}\right) \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{7}\right)$$

$$3. C = \frac{\frac{5}{3} - \frac{7}{2}}{2 - \frac{5}{6}}$$

$$4. D = \frac{3 - 5 \left(\frac{10}{3} - 4\right)}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$5. E = \frac{-2 + \frac{11}{8}}{\frac{9}{3} - 1} - \frac{1}{4}$$

Exercice 2. Simplifier :

$$1. A = 7 \times 2^{16} - 3 \times 2^{17}.$$

$$2. B = \frac{2^{-15} \times (-3)^7 \times 15^{-30} \times 14^3}{6^{17} \times 15^{-30} \times 21^3}.$$

$$3. C = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2016}.$$

$$4. D = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-2016}.$$

$$5. E = 1 - 2^{-1} + 2^{-2} - \dots + 2^{-2016}.$$

Exercice 3. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$1. A = (2x + 3)^2 - (7x - 3)^2.$$

$$2. B = -(-2x + 3)(2x + 3) + 2(2x - 3)(4x - 12).$$

$$3. C = (x + y)^2 + (x - y)^2.$$

$$4. D = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

Exercice 4. Factoriser les expressions suivantes :

$$1. A = 2x^2 - 50.$$

$$2. B = (5x + 3)^2 - (3x - 4)^2.$$

$$3. C = 4x^2 - 49(x - 6)^2.$$

$$4. D = x^2 - 2x + 1.$$

$$5. E = 2x^2 + 8x + 8.$$

Exercice 5. Simplifier :

$$1. A = \sqrt{50} - 5\sqrt{18}.$$

$$2. B = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2.$$

$$3. C = \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}.$$

$$4. D = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}.$$

$$5. E = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6} + 2}$$

Exercice 6. Écrire sous forme canonique :

$$1. f(x) = 2x^2 + x + 1.$$

$$2. g(x) = 3x^2 + 4x - 5.$$

Exercice 7. Résoudre les inéquations en utilisant un tableau de signes :

$$1. (2x + 6)^2 \geq (7x + 9)^2.$$

$$2. (5 - 4x)(3x - 4) \leq (-6x + 8)(2x - 3).$$

$$3. (3 - 5x)(2x + 1) > 4x^2 - 1.$$

Exercice 8. Résoudre les inéquations en utilisant un tableau de signes :

$$1. \frac{6x - 5}{3x^2 - x - 2} \geq 0.$$

$$2. \frac{2x + 7}{3x - 2} \leq \frac{5x + 4}{-3x + 4}.$$

Exercice 9. Résoudre les équations :

$$1. |3x + 2| \geq 5.$$

$$2. |7x - 3| \leq |1 - 9x|.$$

Exercice 10. 1. Résoudre mentalement :

$$(a) 2x = -x + 1$$

$$(b) x^2 = 2x$$

$$(c) (x + 1)^2 = 4x^2$$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(a) x + \sqrt{x} \leq 2$$

$$(b) \sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{x + 3}$$

$$(c) |x + 1| \leq \sqrt{2x + 1}$$

Exercice 11. 1. Résoudre les équations suivantes :

$$(a) \sqrt{x + 2} = \sqrt{x} + \sqrt{2}.$$

$$(b) 3x + 2 + \sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{8x^2 + 4}.$$

$$(c) x + |x + 1| = |x|.$$

$$(d) \sqrt{x + \sqrt{x + 1}} = 1.$$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

$$(a) x + 1 + \sqrt{x} \leq \sqrt{x + 1}$$

$$(b) x + \sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$(c) |x| + |x + 1| \leq |x + 2|$$

Exercice 12. Soient a, b, c trois nombres réels.

Le but de cet exercice est de montrer que

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

et qu'en cas d'égalité on a $a = b = c$.

On pose $P(x) = (ax + b)^2 + (bx + c)^2 + (cx + a)^2$, $A = a^2 + b^2 + c^2$ et $B = ab + bc + ca$.

1. Exprimer $P(x)$ en fonction de A et B .

2. Montrer que $B \leq A$.

3. Montrer que si $A = B$ alors l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution.

4. En déduire que si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ alors $a = b = c$.

(Pourriez-vous généraliser ces résultats ? Si oui comment procéderiez-vous ?)