

Exercice 1.

Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

$$D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-1}{n!} \quad E = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n} \quad F = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$$

$$G = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n-1}{3^n} \quad H = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{n!} \quad I = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{2^n} \quad K = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n - 1)e^{-2n} \quad L = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 2^n}{2^{2n}}$$

$$M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n}{4^{n+1}} \quad N = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - n + 3^n}{n!} \quad J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n - (-2)^n}{3^n}$$

Exercice 2.

Soit $u_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 3$, $u_n = \frac{a}{(n-3)!} + \frac{b}{(n-2)!} + \frac{c}{(n-1)!}$.
- En déduire que la série $\sum_{n \geq 1}$ converge et donner sa somme.

Exercice 3. Soit $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$. Montrer que

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} = 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} = \frac{1}{p} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 pq^{n-1} = \frac{q+1}{p^2}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda(\lambda + 1).$$

Exercice 4.

Considérons les trois suites suivantes :

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right), \quad v_n = \ln \left(\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} \right), \quad w_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

- (a) Écrire pour tout entier naturel u_n sous la forme $a_{n+1} - a_n$.
(b) En déduire que la série de terme u_n converge et donner sa valeur.
- Reprendre les questions précédentes avec v_n et w_n .

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2 - 1}$.

- Déterminer des réels a, b et c tels que $\forall n \geq 1$, $\frac{n}{4n^2 - 1} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n-1}$.
- En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 6.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

- Déterminer des réels a, b et c tels que $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
- En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 7.

On considère la suite $u_n = \ln(n+2) - 2\ln(n+1) + \ln(n)$ pour $n \geq 1$.

1. Donner, pour tout $n \geq 1$, une expression simple de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
2. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1}$ ainsi que sa somme.

Exercice 8. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_{n+1} = a_n e^{-a_n}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.
 (b) Étudier le sens de variation de la suite (a_n) .
 (c) En déduire que (a_n) converge et déterminer sa limite.
2. (a) On pose $b_n = \ln(a_n)$. Calculer $b_{n+1} - b_n$ en fonction de a_n .
 (b) En déduire la nature de la série $\sum a_n$

Exercice 9.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in]0; 1[$ et par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$.
 (b) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
 (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge, et calculer sa somme en fonction de u_0 .
3. Quelle est la nature de la série $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$?

partielle de rang n de cette série :

Exercice 10.

1. Démontrer les inégalités suivantes :
 (i) $\forall x \in \mathbb{R}; e^x \geq x$ (ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*; x \geq \ln(x)$ (iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*; \ln(x) \leq 2\sqrt{x}$
2. En déduire la nature des séries suivantes :
 (i) $\sum e^{-n^2}$ (ii) $\sum \frac{n + \ln(n)}{\sqrt{n} + n^3}$ (iii) $\sum \frac{1}{\ln(n)}$

Exercice 11.

Considérons la série $\sum \frac{1}{n}$ et notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ sa somme partielle de rang n . Nous allons montrer que cette série est divergente.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$
2. Supposons, par l'absurde, que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, c'est à dire que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel

Exercice 12.

On considère la série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ et on note S_n la n -ième somme partielle de cette série.

1. Déterminer la monotonie de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k}$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$.

4. Montrer que la série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{e}{e-1}$

Pour aller plus loin

Exercice 13 (Oral HEC ***).

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α , la nature de la série de terme général u_n défini par

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n^2 + k)^\alpha}$$

Exercice 14 (***).

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \min(u_n, v_n), \sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et } \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Exercice 15 (***).

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq 2a_n \Leftrightarrow a_n \geq \frac{1}{2^n}$$

et

$$a_n \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

3. Établir la convergence de la série $\sum a_n^{1-1/n}$ (on peut utiliser l'exercice 14).